デンドロイドを紙に細字で描くとき

木原貴行

東北大学大学院理学研究科数学専攻

2010 年 11 月 19 日

数学基礎論若手の会 2010

導入

- $\mathbb{R}^n$ の非空 $\underset{\sim}{\Sigma}^0_1$ 集合 (= 開集合) は計算可能な点を含む.

導入

- $\mathbb{R}^n$ の非空 $\underset{\sim}{\Sigma}^0_1$ 集合 (= 開集合) は計算可能な点を含む．
- $\mathbb{R}^n$ の非空 Π^0_1 集合は計算可能な点を含むとは限らない．

導入

- $\mathbb{R}^n$ の非空 $\underset{\sim}{\Sigma}^0_1$ 集合 $(=$ 開集合$)$ は計算可能な点を含む.
- $\mathbb{R}^n$ の非空 Π^0_1 集合は計算可能な点を含むとは限らない.
- $\mathbb{R}^1$ の非空 Π^0_1 集合が計算可能な点を含まないとしたら, それは必ず不連結である.

導入

- $\mathbb{R}^n$ の非空 $\underset{\sim}{\Sigma}^0_1$ 集合 (= 開集合) は計算可能な点を含む．
- $\mathbb{R}^n$ の非空 Π^0_1 集合は計算可能な点を含むとは限らない．
- $\mathbb{R}^1$ の非空 Π^0_1 集合が計算可能な点を含まないとしたら，それは必ず**不連結**である．
- $\mathbb{R}^n$ の非空 Π^0_1 集合で，計算可能な点を含まず，さらに **（単）連結**なものは存在するか？

導入

- $\mathbb{R}^n$ の非空 $\underset{\sim}{\Sigma}^0_1$ 集合 $(=$ 開集合$)$ は計算可能な点を含む．
- $\mathbb{R}^n$ の非空 Π^0_1 集合は計算可能な点を含むとは限らない．
- $\mathbb{R}^1$ の非空 Π^0_1 集合が計算可能な点を含まないとしたら，それは必ず**不連結**である．
- $\mathbb{R}^n$ の非空 Π^0_1 集合で，計算可能な点を含まず，さらに（単）**連結**なものは存在するか？
- $\Longrightarrow$ **連結空間の計算可能性理論**を研究してみよう！

定義

X: T_0 位相空間で，可算開基 $\{\beta_e\}$ を持つ．

1. 点 $x \in X$ が**計算可能** $\iff$ $\{e : x \in \beta_e\}$ が Σ^0_1.

定義

X: T_0 位相空間で，可算開基 $\{\beta_e\}$ を持つ．

1. 点 $x \in X$ が**計算可能** $\iff$ $\{e : x \in \beta_e\}$ が Σ^0_1.
2. 閉集合 $F \subseteq X$ が Π^0_1 $\iff$ $F = X \setminus \bigcup_{e \in W} \beta_e$,
   ここで $W \subseteq \mathbb{N}$ はある Σ^0_1 集合．

定義

X: T_0 位相空間で，可算開基 $\{\beta_e\}$ を持つ．

1. 点 $x \in X$ が**計算可能** $\iff$ $\{e : x \in \beta_e\}$ が Σ^0_1.
2. 閉集合 $F \subseteq X$ が Π^0_1 $\iff$ $F = X \setminus \bigcup_{e \in W} \beta_e$,
   ここで $W \subseteq \mathbb{N}$ はある Σ^0_1 集合．
3. 閉集合 $F \subseteq X$ が c.e. $\iff$ $\{e : F \cap \beta_e \neq \emptyset\}$ が Σ^0_1.

定義

X: T_0 位相空間で，可算開基 $\{\beta_e\}$ を持つ．

1. 点 $x \in X$ が**計算可能** $\iff$ $\{e : x \in \beta_e\}$ が Σ^0_1.
2. 閉集合 $F \subseteq X$ が Π^0_1 $\iff$ $F = X \setminus \bigcup_{e \in W} \beta_e$,
   ここで $W \subseteq \mathbb{N}$ はある Σ^0_1 集合．
3. 閉集合 $F \subseteq X$ が c.e. $\iff$ $\{e : F \cap \beta_e \neq \emptyset\}$ が Σ^0_1.
4. 閉集合 $F \subseteq X$ が**計算可能** $\iff$ F が c.e. かつ Π^0_1.

定義

X: T_0 位相空間で，可算開基 $\{\beta_e\}$ を持つ．

1. 点 $x \in X$ が**計算可能** $\iff$ $\{e : x \in \beta_e\}$ が Σ^0_1.
2. 閉集合 $F \subseteq X$ が Π^0_1 $\iff$ $F = X \setminus \bigcup_{e \in W} \beta_e$, ここで $W \subseteq \mathbb{N}$ はある Σ^0_1 集合．
3. 閉集合 $F \subseteq X$ が c.e. $\iff$ $\{e : F \cap \beta_e \neq \emptyset\}$ が Σ^0_1.
4. 閉集合 $F \subseteq X$ が**計算可能** $\iff$ F が c.e. かつ Π^0_1.

ユークリッド空間の場合の特徴付け

閉集合 $F \subseteq \mathbb{R}^n$ について，$d_F(x) = \inf_{y \in F} d(x, y)$ とする．

- F は Π^0_1 $\iff$ d_F は下半計算可能．
- F は c.e. $\iff$ d_F は上半計算可能．
- F は計算可能 $\iff$ d_F は計算可能．

そもそも Π^0_1 ってなに

だいたいこんなイメージ

- Π^0_1 集合は，計算可能生成な開集合の補集合である．

そもそも Π^0_1ってなに

だいたいこんなイメージ

- Π^0_1 集合は，計算可能生成な開集合の補集合である．
- つまり，全体空間をがりがり削っていくことにより作られる．

そもそも Π^0_1 ってなに

だいたいこんなイメージ

- Π^0_1 集合は，計算可能生成な開集合の補集合である．
- つまり，全体空間をがりがり削っていくことにより作られる．
- $\mathbb{R}^3$ の Π^0_1 集合の構成は，彫刻をイメージ．

そもそも Π^0_1 ってなに

だいたいこんなイメージ

- Π^0_1 集合は，計算可能生成な開集合の補集合である．
- つまり，全体空間をがりがり削っていくことにより作られる．
- $\mathbb{R}^3$ の Π^0_1 集合の構成は，彫刻をイメージ．
- $\mathbb{R}^2$ の Π^0_1 集合の構成は，版画をイメージ．

そもそも Π^0_1 ってなに

だいたいこんなイメージ

- Π^0_1 集合は，**計算可能生成な開集合**の補集合である．
- つまり，全体空間をがりがり削っていくことにより作られる．
- $\mathbb{R}^3$ の Π^0_1 集合の構成は，**彫刻**をイメージ．
- $\mathbb{R}^2$ の Π^0_1 集合の構成は，**版画**をイメージ．
- 計算可能閉集合の構成は，彫刻を制作しながら
  「**この部分は削らず残しておきましたリスト**」
  を作ることを義務化される感じ．

連結 Π^0_1 集合

観測

1. 計算可能な点を含まない非空 Π^0_1 集合 $F \subseteq \mathbb{R}^1$ が存在する．
2. 非空連結 Π^0_1 集合 $F \subseteq \mathbb{R}^1$ は計算可能な点を含む．

連結 Π^0_1 集合

観測

1. 計算可能な点を含まない非空 Π^0_1 集合 $F \subseteq \mathbb{R}^1$ が存在する．
2. 非空連結 Π^0_1 集合 $F \subseteq \mathbb{R}^1$ は計算可能な点を含む．

もう少し具体的な構造

非空コンパクト Π^0_1 集合 $F \subseteq \mathbb{R}^1$ が計算可能な点を含まないなら

1. F は孤立点を持たない．
2. F は全不連結である．

つまり，F はカントール集合と同相である．

連結 Π^0_1 集合

観測

1. 計算可能な点を含まない非空 Π^0_1 集合 $F \subseteq \mathbb{R}^1$ が存在する．
2. 非空連結 Π^0_1 集合 $F \subseteq \mathbb{R}^1$ は計算可能な点を含む．

もう少し具体的な構造

非空コンパクト Π^0_1 集合 $F \subseteq \mathbb{R}^1$ が計算可能な点を含まないなら

1. F は孤立点を持たない．
2. F は全不連結である．

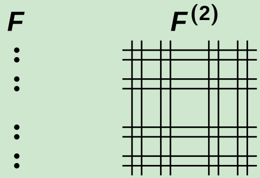
つまり，F はカントール集合と同相である．

疑問

次元を高くすれば，計算可能な点を持たない非空連結 Π^0_1 集合が現れるだろうか？

Example (穴を塞ぐ作業)

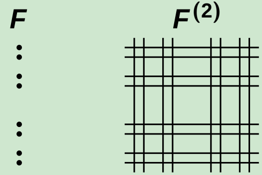
複雑性を保ちつつ，不連結な集合から連結な集合を作る方法：



$F \subseteq [0,1]$ について，$F^{(n)} = \bigcup_{k<n}([0,1]^k \times F \times [0,1]^{n-k-1})$.

Example (穴を塞ぐ作業)

複雑性を保ちつつ，不連結な集合から連結な集合を作る方法：



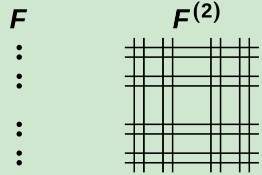
$F \subseteq [0,1]$ について，$F^{(n)} = \bigcup_{k<n}([0,1]^k \times F \times [0,1]^{n-k-1})$.

これから明らかに分かること (Le Roux-Ziegler)

- $F \subseteq [0,1]$ を計算可能な点を含まない非空 Π^0_1 集合とする．

Example (穴を塞ぐ作業)

複雑性を保ちつつ，不連結な集合から連結な集合を作る方法：



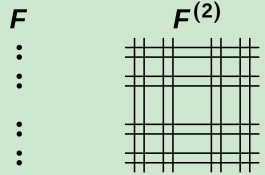
$F \subseteq [0,1]$ について，$F^{(n)} = \bigcup_{k<n}([0,1]^k \times F \times [0,1]^{n-k-1})$.

これから明らかに分かること (Le Roux-Ziegler)

- $F \subseteq [0,1]$ を計算可能な点を含まない非空 Π^0_1 集合とする．
- $F^{(2)} \subseteq [0,1]^2$ は計算可能な点を含まない非空連結 Π^0_1 集合．

Example (穴を塞ぐ作業)

複雑性を保ちつつ，不連結な集合から連結な集合を作る方法：



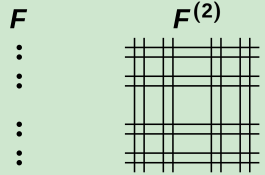
$F \subseteq [0,1]$ について，$F^{(n)} = \bigcup_{k<n}([0,1]^k \times F \times [0,1]^{n-k-1})$.

これから明らかに分かること (Le Roux-Ziegler)

- $F \subseteq [0,1]$ を計算可能な点を含まない非空 Π^0_1 集合とする．
- $F^{(2)} \subseteq [0,1]^2$ は計算可能な点を含まない非空連結 Π^0_1 集合．
- $F^{(3)} \subseteq [0,1]^3$ は計算可能な点を含まない非空単連結 Π^0_1 集合．

Example (穴を塞ぐ作業)

複雑性を保ちつつ，不連結な集合から連結な集合を作る方法：



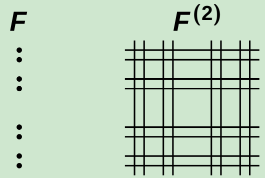
$F \subseteq [0,1]$ について，$F^{(n)} = \bigcup_{k<n}([0,1]^k \times F \times [0,1]^{n-k-1})$.

この穴埋め作業の問題点

- その次元の穴を塞いでも，高次元の穴が開く．

Example (穴を塞ぐ作業)

複雑性を保ちつつ，不連結な集合から連結な集合を作る方法：



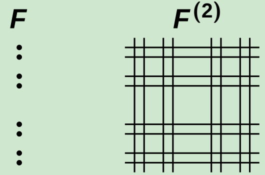
$F \subseteq [0,1]$ について，$F^{(n)} = \bigcup_{k<n}([0,1]^k \times F \times [0,1]^{n-k-1})$.

この穴埋め作業の問題点

- その次元の穴を塞いでも，高次元の穴が開く．
- $F^{(n)} \subseteq \mathbb{R}^n$ の $(n-2)$-次ホモトピー群は自明になるが，$(n-1)$-次ホモトピー群がやばい．

Example (穴を塞ぐ作業)

複雑性を保ちつつ，不連結な集合から連結な集合を作る方法：



$F \subseteq [0,1]$ について，$F^{(n)} = \bigcup_{k<n}([0,1]^k \times F \times [0,1]^{n-k-1})$.

この穴埋め作業の問題点

- その次元の穴を塞いでも，高次元の穴が開く．
- $F^{(n)} \subseteq \mathbb{R}^n$ の $(n-2)$-次ホモトピー群は自明になるが，$(n-1)$-次ホモトピー群がやばい．
- 実際，$F^{(n)} \subseteq \mathbb{R}^n$ は $(n-2)$-連結だが，$(n-1)$-連結でない．

連結 Π^0_1 集合

- X が n-連結 $\iff$ n 次以下のホモトピー群が全て消滅.
- X が弧状連結 $\iff$ X が 0-連結.
- X が単連結 $\iff$ X が 1-連結.

連結 Π^0_1 集合

- X が n-連結 $\iff$ n 次以下のホモトピー群が全て消滅.
- X が弧状連結 $\iff$ X が 0-連結.
- X が単連結 $\iff$ X が 1-連結.

さっきまでのまとめ

1. $\mathbb{R}^1$ の非空 0-連結 Π^0_1 集合は計算可能な点を含む.
2. $\mathbb{R}^2$ の非空 0-連結 Π^0_1 集合は計算可能な点を含むとは限らない.
3. $\mathbb{R}^3$ の非空 1-連結 Π^0_1 集合は計算可能な点を含むとは限らない.
4. 一般に, $\mathbb{R}^{n+2}$ の非空 n-連結 Π^0_1 集合は計算可能な点を含むとは限らない.

連結 Π^0_1 集合

- X が ***n*-連結** $\iff$ n 次以下のホモトピー群が全て消滅．
- X が**弧状連結** $\iff$ X が 0-連結．
- X が**単連結** $\iff$ X が 1-連結．

さっきまでのまとめ

1. $\mathbb{R}^1$ の非空 0-連結 Π^0_1 集合は計算可能な点を含む．
2. $\mathbb{R}^2$ の非空 0-連結 Π^0_1 集合は計算可能な点を含むとは限らない．
3. $\mathbb{R}^3$ の非空 1-連結 Π^0_1 集合は計算可能な点を含むとは限らない．
4. 一般に，$\mathbb{R}^{n+2}$ の非空 n-連結 Π^0_1 集合は計算可能な点を含むとは限らない．

問題 (Le Roux-Ziegler)

$\mathbb{R}^2$ の非空単連結 Π^0_1 集合は計算可能な点を含むか？

平面の単連結 Π^0_1 集合の具体例

例 (ペンローズ "Emperor's New Mind (**邦訳：皇帝の新しい心**)")

マンデルブロ集合は複素平面の単連結コンパクト Π^0_1 集合である．

平面の単連結 Π^0_1 集合の具体例

例 (ペンローズ “Emperor’s New Mind (邦訳：皇帝の新しい心)”)

マンデルブロ集合は複素平面の単連結コンパクト Π^0_1 集合である．

ペンローズ予想

マンデルブロ集合は計算可能閉集合ではない．

平面の単連結 Π^0_1 集合の具体例

例 (ペンローズ "Emperor's New Mind (邦訳：皇帝の新しい心)")

マンデルブロ集合は複素平面の単連結コンパクト Π^0_1 集合である．

ペンローズ予想

マンデルブロ集合は計算可能閉集合ではない．

定理 (Hertling)

ペンローズ予想が真 $\Longrightarrow$ マンデルブロ集合は局所連結ではない．

主定理

定義

1. 距離空間 (X,d) の非空閉集合 A_0, A_1 の間の**ハウスドルフ距離**とは，$d_H(A_0,A_1) = \max_{i<2} \sup_{x\in A_i} \inf_{y\in A_{1-i}} d(x,y)$.
2. A が $\mathcal{Q}$ を**殆ど含む** $\iff$ $\inf\{d_H(B,A) : A \supseteq B \in \mathcal{Q}\} = 0$.

主定理

定義

1. 距離空間 (X, d) の非空閉集合 A_0, A_1 の間の**ハウスドルフ距離**とは，$d_H(A_0, A_1) = \max_{i<2} \sup_{x \in A_i} \inf_{y \in A_{1-i}} d(x, y)$.
2. A が $\mathcal{Q}$ を**殆ど含む** $\iff$ $\inf\{d_H(B, A) : A \supseteq B \in \mathcal{Q}\} = 0$.

主定理

1. $[0, 1]^2$ のある非空単連結/局所単連結な Π^0_1 集合で，連結計算可能閉部分集合を殆ど含まないものが存在する．

主定理

定義

1. 距離空間 (X,d) の非空閉集合 A_0, A_1 の間の**ハウスドルフ距離**とは，$d_H(A_0,A_1) = \max_{i<2} \sup_{x\in A_i} \inf_{y\in A_{1-i}} d(x,y)$.
2. A が $\mathcal{Q}$ を**殆ど含む** $\iff \inf\{d_H(B,A) : A \supseteq B \in \mathcal{Q}\} = 0$.

主定理

1. $[0,1]^2$ のある非空単連結/局所単連結な Π^0_1 集合で，連結計算可能閉部分集合を殆ど含まないものが存在する．
2. $[0,1]^2$ のある非空単連結計算可能閉集合で，連結/局所連結な Π^0_1 部分集合を殆ど含まないものが存在する．

主定理

定義

1. 距離空間 (X,d) の非空閉集合 A_0, A_1 の間の**ハウスドルフ距離**とは，$d_H(A_0,A_1) = \max_{i<2} \sup_{x\in A_i} \inf_{y\in A_{1-i}} d(x,y)$.
2. A が $\mathcal{Q}$ を**殆ど含む** $\iff \inf\{d_H(B,A) : A \supseteq B \in \mathcal{Q}\} = 0$.

主定理

1. $[0,1]^2$ のある非空単連結/局所単連結な Π^0_1 集合で，連結計算可能閉部分集合を殆ど含まないものが存在する．
2. $[0,1]^2$ のある非空単連結計算可能閉集合で，連結/局所連結な Π^0_1 部分集合を殆ど含まないものが存在する．
3. $[0,1]^2$ のある非空単連結 Π^0_1 集合で，計算可能な点を含まないものが存在する．

主定理

定義

1. 距離空間 (X,d) の非空閉集合 A_0, A_1 の間の**ハウスドルフ距離**とは，$d_H(A_0,A_1) = \max_{i<2} \sup_{x\in A_i} \inf_{y\in A_{1-i}} d(x,y)$.
2. A が $\mathcal{Q}$ を**殆ど含む** $\iff \inf\{d_H(B,A) : A \supseteq B \in \mathcal{Q}\} = 0$.

主定理

1. $[0,1]^2$ のある非空単連結/局所単連結な Π^0_1 集合で，連結計算可能閉部分集合を殆ど含まないものが存在する．
2. $[0,1]^2$ のある非空単連結計算可能閉集合で，連結/局所連結な Π^0_1 部分集合を殆ど含まないものが存在する．
3. $[0,1]^2$ のある非空単連結 Π^0_1 集合で，計算可能な点を含まないものが存在する．$\Rightarrow$ *Le Roux-Ziegler* **問題の解決．**

主定理の証明のために，連続体論（コンパクト連結距離空間論）の概念を用いる．

主定理の証明のために，連続体論（コンパクト連結距離空間論）の概念を用いる．

定義（連続体，デンドライト，デンドロイド）

X を位相空間とする．

1. X が**連結** $\iff$ 2 つの非空開集合の非交叉和にならない．
2. X が**局所連結** $\iff$ 連結集合からなる開基を持つ．
3. X が**弧連結** $\iff$ X の任意の 2 点が弧で繋がる．

主定理の証明のために，連続体論（コンパクト連結距離空間論）の概念を用いる．

定義（連続体，デンドライト，デンドロイド）

X を位相空間とする．

1. X が**連結** $\iff$ 2 つの非空開集合の非交叉和にならない．
2. X が**局所連結** $\iff$ 連結集合からなる開基を持つ．
3. X が**弧連結** $\iff$ X の任意の 2 点が弧で繋がる．
4. **連続体**とは，コンパクト連結距離空間である．

主定理の証明のために，連続体論（コンパクト連結距離空間論）の概念を用いる．

定義（連続体，デンドライト，デンドロイド）

X を位相空間とする．

1. X が**連結** $\iff$ 2 つの非空開集合の非交叉和にならない．
2. X が**局所連結** $\iff$ 連結集合からなる開基を持つ．
3. X が**弧連結** $\iff$ X の任意の 2 点が弧で繋がる．
4. **連続体**とは，コンパクト連結距離空間である．
5. X が**単連接** $\iff$ $A \cup B = X$ なる任意の連結閉集合 A, B について，$A \cap B$ が連結．
6. X が**遺伝的単連接** $\iff$ 任意の部分連続体が単連接．

主定理の証明のために，連続体論（コンパクト連結距離空間論）の概念を用いる．

定義（連続体，デンドライト，デンドロイド）

X を位相空間とする．

1. X が**連結** $\iff$ 2 つの非空開集合の非交叉和にならない．
2. X が**局所連結** $\iff$ 連結集合からなる開基を持つ．
3. X が**弧連結** $\iff$ X の任意の 2 点が弧で繋がる．
4. **連続体**とは，コンパクト連結距離空間である．
5. X が**単連接** $\iff$ $A \cup B = X$ なる任意の連結閉集合 A, B について，$A \cap B$ が連結．
6. X が**遺伝的単連接** $\iff$ 任意の部分連続体が単連接．
7. **デンドロイド**とは，弧連結な遺伝的単連接連続体である．
8. **デンドライト**とは，局所連結デンドロイドである．

基本的性質（連続体論より）

1. ハウスドルフ空間 X がペアノ連続体（局所連結な連続体）$\iff$ X は $[0,1]$ の連続像．

基本的性質（連続体論より）

1. ハウスドルフ空間 X がペアノ連続体（局所連結な連続体） $\iff$ X は $[0,1]$ の連続像．
2. デンドライト $\iff$ ジョルダン曲線を含まないペアノ連続体．

基本的性質（連続体論より）

1. ハウスドルフ空間 X がペアノ連続体（局所連結な連続体）$\iff$ X は $[0,1]$ の連続像．
2. デンドライト $\iff$ ジョルダン曲線を含まないペアノ連続体．
3. 任意のデンドロイドは一意弧連結である．

基本的性質（連続体論より）

1. ハウスドルフ空間 X がペアノ連続体（局所連結な連続体）$\iff$ X は $[0,1]$ の連続像．
2. デンドライト $\iff$ ジョルダン曲線を含まないペアノ連続体．
3. 任意のデンドロイドは一意弧連結である．
4. 任意のデンドロイドは単連結である．

基本的性質（連続体論より）

1. ハウスドルフ空間 X がペアノ連続体（局所連結な連続体）$\iff$ X は $[0,1]$ の連続像．
2. デンドライト $\iff$ ジョルダン曲線を含まないペアノ連続体．
3. 任意のデンドロイドは一意弧連結である．
4. 任意のデンドロイドは単連結である．
5. 任意のコンパクト距離空間はヒルベルトキューブ $[0,1]^{\mathbb{N}}$ に埋め込まれる．

基本的性質（連続体論より）

1. ハウスドルフ空間 X がペアノ連続体（局所連結な連続体）$\iff$ X は $[0,1]$ の連続像．
2. デンドライト $\iff$ ジョルダン曲線を含まないペアノ連続体．
3. 任意のデンドロイドは一意弧連結である．
4. 任意のデンドロイドは単連結である．
5. 任意のコンパクト距離空間はヒルベルトキューブ $[0,1]^{\mathbb{N}}$ に埋め込まれる．
6. 任意のデンドライトは $[0,1]^2$ に埋め込まれる．

基本的性質（連続体論より）

1. ハウスドルフ空間 X がペアノ連続体（局所連結な連続体）$\iff$ X は $[0,1]$ の連続像．
2. デンドライト $\iff$ ジョルダン曲線を含まないペアノ連続体．
3. 任意のデンドロイドは一意弧連結である．
4. 任意のデンドロイドは単連結である．
5. 任意のコンパクト距離空間はヒルベルトキューブ $[0,1]^{\mathbb{N}}$ に埋め込まれる．
6. 任意のデンドライトは $[0,1]^2$ に埋め込まれる．
7. $[0,1]^2$ に埋め込めないデンドロイドが存在する．

基本的性質（連続体論より）

1. ハウスドルフ空間 X がペアノ連続体（局所連結な連続体）$\iff$ X は $[0,1]$ の連続像．
2. デンドライト $\iff$ ジョルダン曲線を含まないペアノ連続体．
3. 任意のデンドロイドは一意弧連結である．
4. 任意のデンドロイドは単連結である．
5. 任意のコンパクト距離空間はヒルベルトキューブ $[0,1]^{\mathbb{N}}$ に埋め込まれる．
6. 任意のデンドライトは $[0,1]^2$ に埋め込まれる．
7. $[0,1]^2$ に埋め込めないデンドロイドが存在する．
8. デンドライトの部分連続体はデンドライトである．

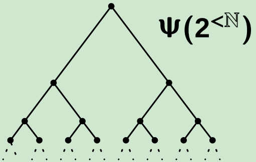
基本的性質（連続体論より）

1. ハウスドルフ空間 X がペアノ連続体（局所連結な連続体）$\Longleftrightarrow$ X は $[0,1]$ の連続像．
2. デンドライト $\Longleftrightarrow$ ジョルダン曲線を含まないペアノ連続体．
3. 任意のデンドロイドは一意弧連結である．
4. 任意のデンドロイドは単連結である．
5. 任意のコンパクト距離空間はヒルベルトキューブ $[0,1]^{\mathbb{N}}$ に埋め込まれる．
6. 任意のデンドライトは $[0,1]^2$ に埋め込まれる．
7. $[0,1]^2$ に埋め込めないデンドロイドが存在する．
8. デンドライトの部分連続体はデンドライトである．
9. デンドロイドの部分連続体はデンドロイドである．

Π^0_1 デンドライト

例（デンドライト）

木 $T \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$ をユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ の上に描画する．
このとき，描かれた絵 $\psi(T) \subseteq \mathbb{R}^2$ はデンドライトである．

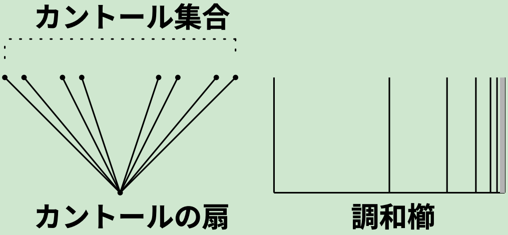


$\mathbb{R}^2$ への $2^{<\mathbb{N}}$ の描画

Π^0_1 デンドロイド

Example

カントールの扇と調和櫛はデンドロイドだがデンドライトでない



ここで，調和櫛とは，次により定義される：

$$\big([0,1]\times\{0\}\big)\cup\Big(\big(\{0\}\cup\{1/n : n\in\mathbb{N}\}\big)\times[0,1]\Big).$$

主定理

主定理（再掲）

1. $[0,1]^2$ のある非空単連結/局所単連結な Π^0_1 集合で，連結計算可能閉部分集合を殆ど含まないものが存在する．
2. $[0,1]^2$ のある非空単連結計算可能閉集合で，連結/局所連結な Π^0_1 部分集合を殆ど含まないものが存在する．
3. $[0,1]^2$ のある非空単連結 Π^0_1 集合で，計算可能な点を含まないものが存在する． $\Rightarrow$ *Le Roux-Ziegler* **問題の解決．**

主定理

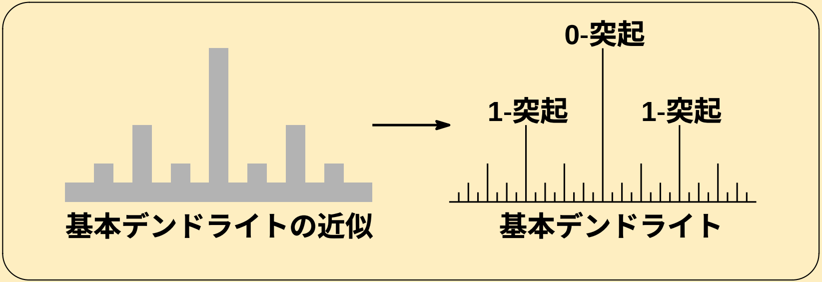
主定理（強い形）

1. $[0,1]^2$ のある Π^0_1 デンドライトで，計算可能デンドライトを殆ど含まないものが存在する．
2. $[0,1]^2$ のある計算可能デンドロイドで，Π^0_1 デンドライトを殆ど含まないものが存在する．
3. $[0,1]^2$ のある非空単連結 Π^0_1 集合で，計算可能な点を含まないものが存在する．⇒ *Le Roux-Ziegler* **問題の解決．**

殆ど計算不可能な平面の Π^0_1 ペアノ連続体

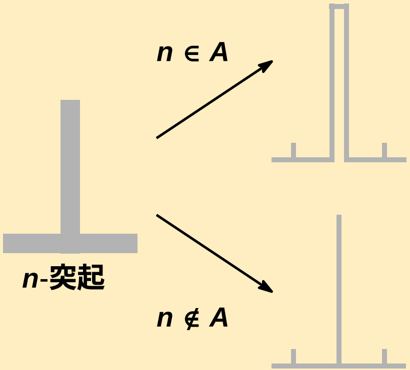
主定理 1 (再掲)

$[0,1]^2$ のある Π^0_1 デンドライトで計算可能デンドライトを殆ど含まないものが存在する.



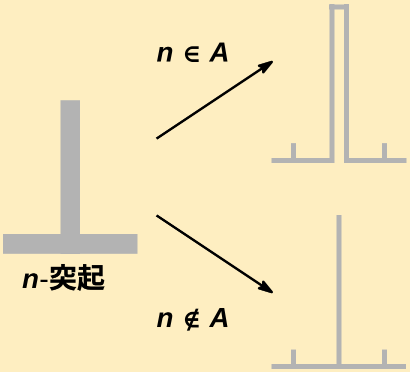
基本デンドライトは高さ 2^{-n} の n-**突起**を 2^n 個持つ.

$A \subseteq \mathbb{N}$ を停止問題とする．
n-突起のまわりの基本構成は次である：



n 番目のプログラムが停止したら，芯を抜いて曲がりくねらせる．
(n 番目のプログラムが動き続けている間は，
n-突起を徐々に痩せさせる．)

$A \subseteq \mathbb{N}$ を停止問題とする．
n-突起のまわりの基本構成は次である：



$n \in A \Longrightarrow n$-突起の頂点は切断点（取り除くと不連結になる）
$n \notin A \Longrightarrow n$-突起の頂点は非切断点.

- 定理の証明のために，この基本構成を改良する．
- Ψ を $2^{<\mathbb{N}}$ の部分木を $\mathbb{R}^2$ に描画する作用素とする．

- 定理の証明のために，この基本構成を改良する．
- Ψ を $2^{<\mathbb{N}}$ の部分木を $\mathbb{R}^2$ に描画する作用素とする．

定義 (Cenzer-**木原**-Weber-Wu 2009)

カントール空間の Π^0_1 集合 P が *tree-immune*
$\iff$ P を生成する Π^0_1 木 T_P が計算可能無限部分木を含まない．
ここで，$T_P = \{\sigma \in 2^{<\mathbb{N}} : (\exists f \supset \sigma)\ f \in P\}$.

- 定理の証明のために，この基本構成を改良する．
- Ψ を $2^{<\mathbb{N}}$ の部分木を $\mathbb{R}^2$ に描画する作用素とする．

定義 (Cenzer-**木原**-Weber-Wu 2009)

カントール空間の Π^0_1 集合 P が *tree-immune*
$\iff$ P を生成する Π^0_1 木 T_P が計算可能無限部分木を含まない．
ここで，$T_P = \{\sigma \in 2^{<\mathbb{N}} : (\exists f \supset \sigma)\ f \in P\}$.

補題

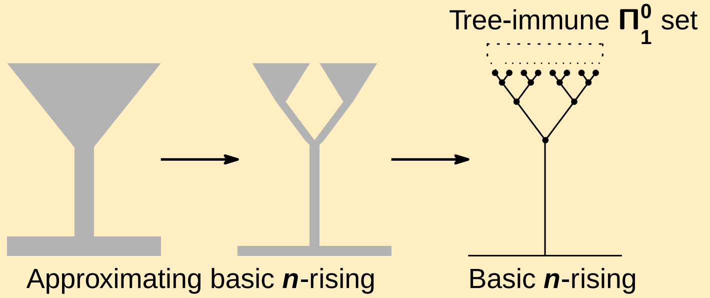
P をカントール空間の tree-immune Π^0_1 集合とし，
$D \subseteq \Psi(T_P)$ を計算可能部分デンドライトとする．
このとき，D は $\Psi(T_P)$ の根を除く端点を含まない．

- Π^0_1 集合の tree-immune 性は，Medvedev 束の non-cuppable な単項素イデアルの存在を証明するために，講演者らによって導入されたものである．

- Π^0_1 集合の tree-immune 性は，Medvedev 束の non-cuppable な単項素イデアルの存在を証明するために，講演者らによって導入されたものである．
- 例：ペアノ算術を含む無矛盾かつ完全な理論全体の集合は tree-immune である．
- これに対応する Π^0_1 木は，おおよそ完全性定理の証明におけるヘンキン構成を表す．

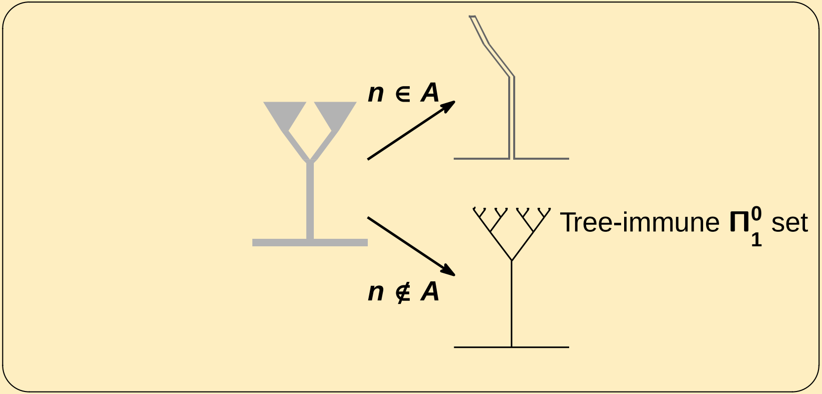
- Π^0_1 集合の tree-immune 性は，Medvedev 束の non-cuppable な単項素イデアルの存在を証明するために，講演者らによって導入されたものである．
- 例：ペアノ算術を含む無矛盾かつ完全な理論全体の集合は tree-immune である．
- これに対応する Π^0_1 木は，おおよそ完全性定理の証明におけるヘンキン構成を表す．
- 主定理 1 の証明は，完全性定理の証明をユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ にデンドライトとして描画し，それを基本デンドライトの各突起の上に繋げる．

本物の構成を始める．



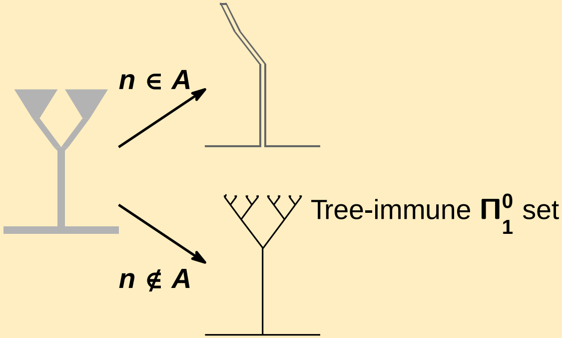
各 n-突起は倍率 2^{-n} の *tree-immune* Π^0_1 集合を持つ．

$A \subseteq \mathbb{N}$ を停止問題とする．
n-突起のまわりの本物の構成は次である：



$n \in A \implies n$-突起の頂点は切断点になる．
$n \notin A \implies n$-突起の頂点のどこも計算可能デンドライトでは到達できない．

$A \subseteq \mathbb{N}$ を停止問題とする．
n-突起のまわりの本物の構成は次である：



$n \in A \Longrightarrow$ もしデンドライト D がある n-突起を通過するなら
D はその n-突起の頂点を含む．
$n \notin A \Longrightarrow$ 計算可能デンドライトは n-突起の頂点を含まない．

主定理 1 (再掲)

$\mathbb{R}^2$ のある Π^0_1 デンドライトで計算可能デンドライトを殆ど含まないものが存在する．

- この構成で得られるデンドライト H は，Π^0_1 である．

主定理 1 (再掲)

$\mathbb{R}^2$ のある Π^0_1 デンドライトで計算可能デンドライトを殆ど含まないものが存在する.

- この構成で得られるデンドライト H は, Π^0_1 である.
- 任意の計算可能部分デンドライト $D \subseteq H$ を取る.

主定理 1 (再掲)

$\mathbb{R}^2$ のある Π^0_1 デンドライトで計算可能デンドライトを殆ど含まないものが存在する．

- この構成で得られるデンドライト H は，Π^0_1 である．
- 任意の計算可能部分デンドライト $D \subseteq H$ を取る．
- D が H の 2 つの突起を通過できないことを示せば十分．

主定理 1 (再掲)

$\mathbb{R}^2$ のある Π^0_1 デンドライトで計算可能デンドライトを殆ど含まないものが存在する．

- この構成で得られるデンドライト H は，Π^0_1 である．
- 任意の計算可能部分デンドライト $D \subseteq H$ を取る．
- D が H の 2 つの突起を通過できないことを示せば十分．
- もし D が m, n-突起を通過するなら，突起の稠密性により，全ての $k \geq m$ について D は k-突起を通過する．

主定理 1 (再掲)

$\mathbb{R}^2$ のある Π^0_1 デンドライトで計算可能デンドライトを殆ど含まないものが存在する．

- この構成で得られるデンドライト H は，Π^0_1 である．
- 任意の計算可能部分デンドライト $D \subseteq H$ を取る．
- D が H の 2 つの突起を通過できないことを示せば十分．
- もし D が m, n-突起を通過するなら，突起の稠密性により，全ての $k \geq m$ について D は k-突起を通過する．
- $k \geq m$ かつ $k \in A$ ならば，D は k-突起の頂点を含む．

主定理 1 (再掲)

$\mathbb{R}^2$ のある Π^0_1 デンドライトで計算可能デンドライトを殆ど含まないものが存在する．

- この構成で得られるデンドライト H は，Π^0_1 である．
- 任意の計算可能部分デンドライト $D \subseteq H$ を取る．
- D が H の 2 つの突起を通過できないことを示せば十分．
- もし D が m, n-突起を通過するなら，突起の稠密性により，全ての $k \geq m$ について D は k-突起を通過する．
- $k \geq m$ かつ $k \in A$ ならば，D は k-突起の頂点を含む．
- D は Π^0_1 なので，次のような k 全体を枚挙できる：どの k-突起の頂点のいずれも D は含まない．

主定理 1 (再掲)

$\mathbb{R}^2$ のある Π^0_1 デンドライトで計算可能デンドライトを殆ど含まないものが存在する．

- この構成で得られるデンドライト H は，Π^0_1 である．
- 任意の計算可能部分デンドライト $D \subseteq H$ を取る．
- D が H の 2 つの突起を通過できないことを示せば十分．
- もし D が m, n-突起を通過するなら，突起の稠密性により，全ての $k \geq m$ について D は k-突起を通過する．
- $k \geq m$ かつ $k \in A$ ならば，D は k-突起の頂点を含む．
- D は Π^0_1 なので，次のような k 全体を枚挙できる：どの k-突起の頂点のいずれも D は含まない．
- これは Σ^0_1 集合 A の補集合を枚挙する手続きを与える．

主定理 1 (再掲)

$\mathbb{R}^2$ のある Π^0_1 デンドライトで計算可能デンドライトを殆ど含まないものが存在する．

- この構成で得られるデンドライト H は，Π^0_1 である．
- 任意の計算可能部分デンドライト $D \subseteq H$ を取る．
- D が H の 2 つの突起を通過できないことを示せば十分．
- もし D が m,n-突起を通過するなら，突起の稠密性により，全ての $k \geq m$ について D は k-突起を通過する．
- $k \geq m$ かつ $k \in A$ ならば，D は k-突起の頂点を含む．
- D は Π^0_1 なので，次のような k 全体を枚挙できる：どの k-突起の頂点のいずれも D は含まない．
- これは Σ^0_1 集合 A の補集合を枚挙する手続きを与える．
- したがって，A の計算不可能性に矛盾する．

主定理 2 (再掲)

$[0,1]^2$ のある計算可能デンドロイドで，Π^0_1 デンドライトを殆ど含まないものが存在する．

主定理 2 (再掲)

$[0,1]^2$ のある計算可能デンドロイドで，Π^0_1 デンドライトを殆ど含まないものが存在する．

- n-突起の代わりに倍率 2^{-n} の**調和櫛**を用意する．
- 証明のアイデアは，無限個の調和櫛を繋げて，極限計算可能なある種の支配関数を近似しながら櫛を折り曲げていくことである．
- 本発表では証明は省略する．

主定理

主定理 3 (再掲)

$[0,1]^2$ のある非空単連結 Π^0_1 集合で，計算可能な点を含まないものが存在する．

主定理

主定理 3 (再掲)

$[0,1]^2$ のある非空単連結 Π^0_1 集合で，計算可能な点を含まないものが存在する．

- ペアノ算術の完全化（ペアノ算術を含む無矛盾かつ完全な理論全体の集合）はカントール集合の非可算 Π^0_1 部分集合として埋め込まれ，ゲーデルの不完全性定理より，計算可能な点を含まない．

主定理

主定理 3 (再掲)

$[0,1]^2$ のある非空単連結 Π^0_1 集合で，計算可能な点を含まないものが存在する．

- ペアノ算術の完全化（ペアノ算術を含む無矛盾かつ完全な理論全体の集合）はカントール集合の非可算 Π^0_1 部分集合として埋め込まれ，ゲーデルの不完全性定理より，計算可能な点を含まない．
- 証明のアイデアは，ペアノ算術の完全化を，計算可能な点を加えないよう行き先不明のままランダムに引き伸ばし，謎の行き先で束ねることである．

主定理

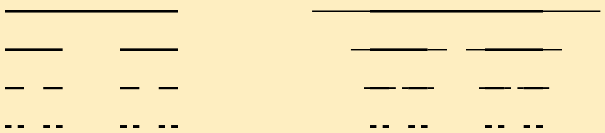
主定理 3 (再掲)

$[0,1]^2$ のある非空単連結 Π^0_1 集合で，計算可能な点を含まないものが存在する．

- ペアノ算術の完全化（ペアノ算術を含む無矛盾かつ完全な理論全体の集合）はカントール集合の非可算 Π^0_1 部分集合として埋め込まれ，ゲーデルの不完全性定理より，計算可能な点を含まない．
- 証明のアイデアは，ペアノ算術の完全化を，計算可能な点を加えないよう行き先不明のままランダムに引き伸ばし，謎の行き先で束ねることである．
- 実際には，この手続きを Π^0_1 でやらなければならない．

カントール集合のふっくら構成：

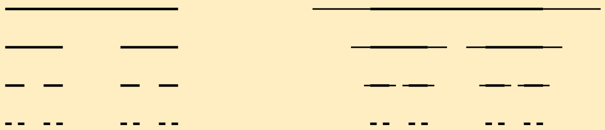
カントール集合の構成　　カントール集合のふっくら構成



- P: カントール集合の Π^0_1 部分集合
- P_s: ふっくら構成に沿う s 段階目
- l_s, r_s: P_s の左端と右端

カントール集合のふっくら構成：

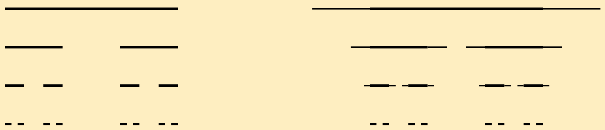
カントール集合の構成　　カントール集合のふっくら構成



- P: カントール集合の Π^0_1 部分集合
- P_s: ふっくら構成に沿う s 段階目
- l_s, r_s: P_s の左端と右端
- 重要点：$[l_s, l_{s+1}] \cap P_s, [r_{s+1}, r_s] \cap P_s$ は必ず区間 I^l_s, I^r_s を含む！

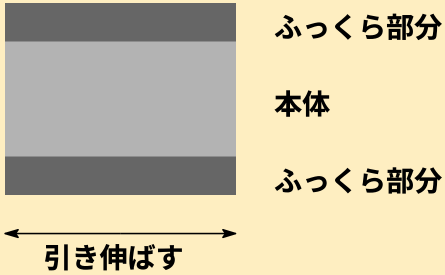
カントール集合のふっくら構成：

カントール集合の構成　　カントール集合のふっくら構成



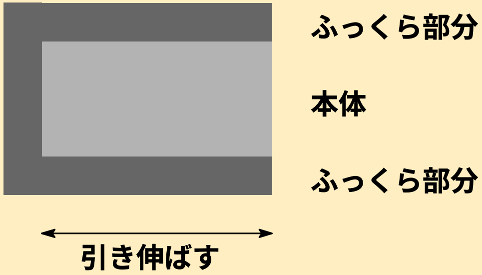
- P: カントール集合の Π^0_1 部分集合
- P_s: ふっくら構成に沿う s 段階目
- l_s, r_s: P_s の左端と右端
- 重要点：$[l_s, l_{s+1}] \cap P_s, [r_{s+1}, r_s] \cap P_s$ は必ず区間 I^l_s, I^r_s を含む！
- その区間 $I^l_s, I^r_s \subseteq P_s \setminus P_{s+1}$ を**ふっくら部分**として参照する．

まず，十分伸ばした ふっくらペアノ算術 D_0^- を準備する．



- $P \subseteq \mathbb{R}^1$: 数直線に埋め込まれたペアノ算術の完全化
- P は Π^0_1 なので，一様計算可能な閉集合の無限下降列 $\{Q_s\}$ が存在して，$P = \bigcap_s Q_s$.
- P_s: Q_s のふっくら化（注：$P = \bigcap_s P_s$）
- D_0^-: たとえば $[0,1] \times P_0$.

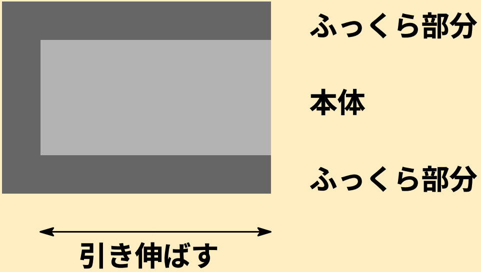
もうちょっと ふっくらさせたものを D_0 とする．



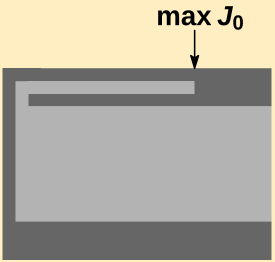
この D_0 をがりがり削って，目的の版画を描こう！

- $\Omega \in \mathbb{R}$ を**チャイティンの Ω** とする．
- Ω は下半計算可能なので，一様計算可能な有理開区間の列 $\{J_s\}$ で次を満たすものが存在する：
  - $\Omega = \lim_s \min J_s$.
  - $\lim_s \mathrm{diam}(J_s) = 0$.
  - $J_{s+1} \subset J_s$ または $\max J_s < \min J_{s+1}$.
  - $(\forall s)(\forall^\infty t)\ J_t \subset J_s$.

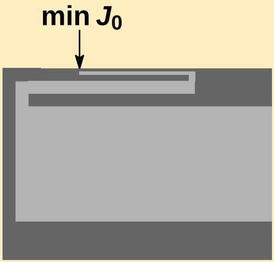
ふっくらペアノ算術 D_0 からはじまりはじまり.



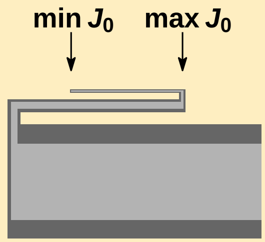
ふっくら部分を削って，$\max J_0$ まで引き伸ばしたペアノ算術を描く．



ふっくら部分を削って，min J_0 まで引き伸ばしたペアノ算術を描く．

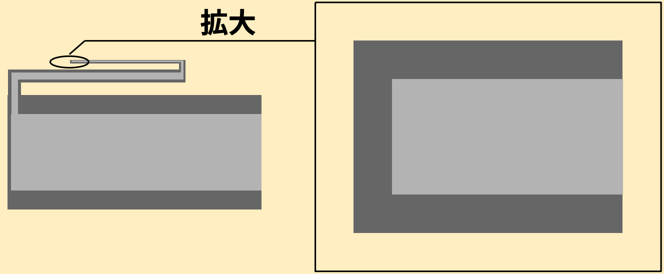


ふっくら構成を 1 ステップ進める．

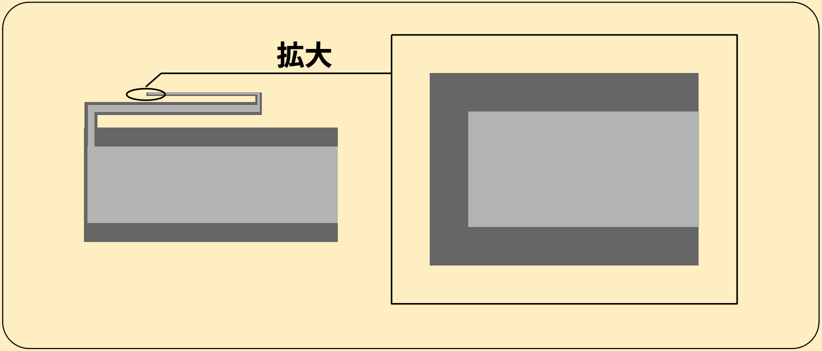


正確には，描かれている P_0 のコピーをその倍率で P_1 になるまで削る．

これを D_1 とする．

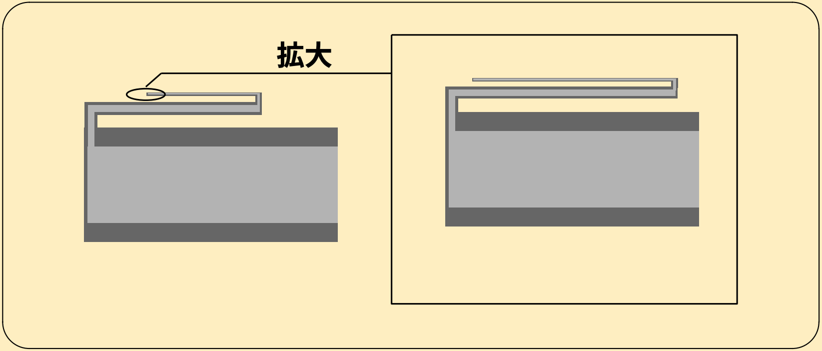


これを D_1 とする．



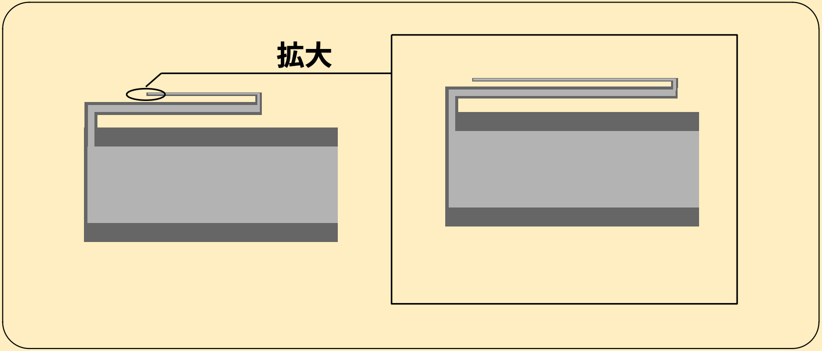
- もし $J_1 \subset J_0$ だったら，D_2 の描画は D_1 と同様である．
- つまり，最上段のブロックだけを使って，ふっくら部分を削り取りながら $\max J_1$ へ進み $\min J_1$ まで折り返す．

これを D_1 とする．



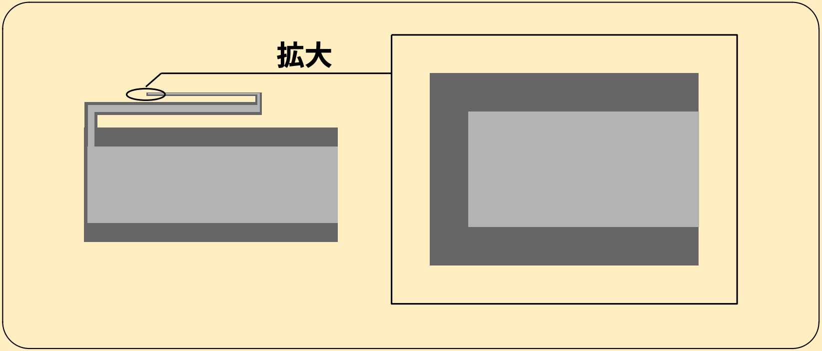
- もし $J_1 \subset J_0$ だったら，D_2 の描画は D_1 と同様である．
- つまり，最上段のブロックだけを使って，ふっくら部分を削り取りながら $\max J_1$ へ進み $\min J_1$ まで折り返す．

これを D_1 とする．



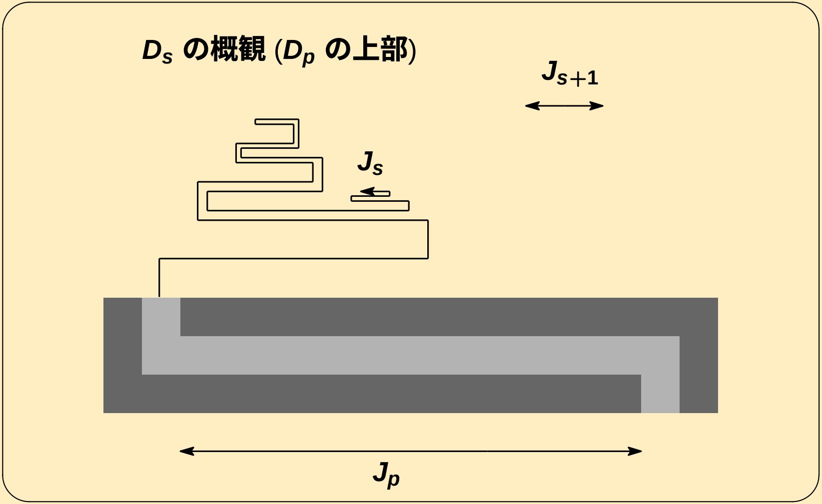
- もし $J_1 \subset J_0$ だったら，D_2 の描画は D_1 と同様である．
- つまり，最上段のブロックだけを使って，ふっくら部分を削り取りながら $\max J_1$ へ進み $\min J_1$ まで折り返す．
- 一般に，$J_{s+1} \subset J_s$ の場合は同様である．

これを D_1 とする．



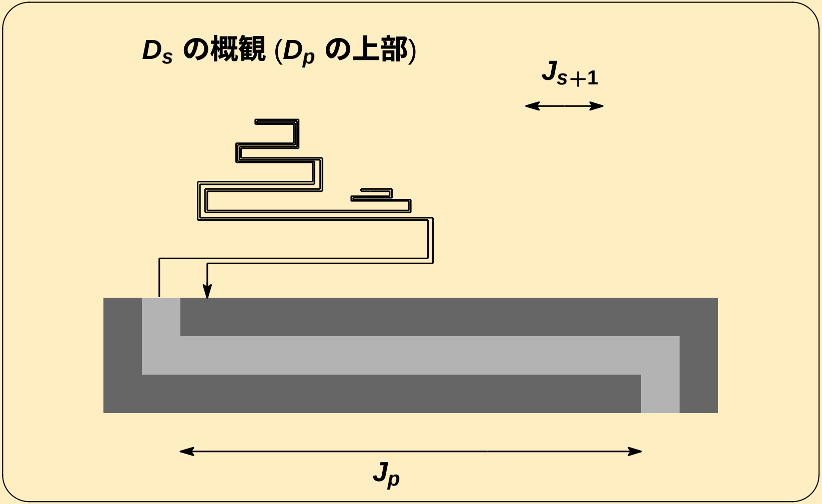
- もし $J_1 \subset J_0$ だったら，D_2 の描画は D_1 と同様である．
- つまり，最上段のブロックだけを使って，ふっくら部分を削り取りながら $\max J_1$ へ進み $\min J_1$ まで折り返す．
- 一般に，$J_{s+1} \subset J_s$ の場合は同様である．
- 問題は $J_{s+1} \not\subset J_s$ の場合である！

$J_{s+1} \not\subset J_s$ の場合．



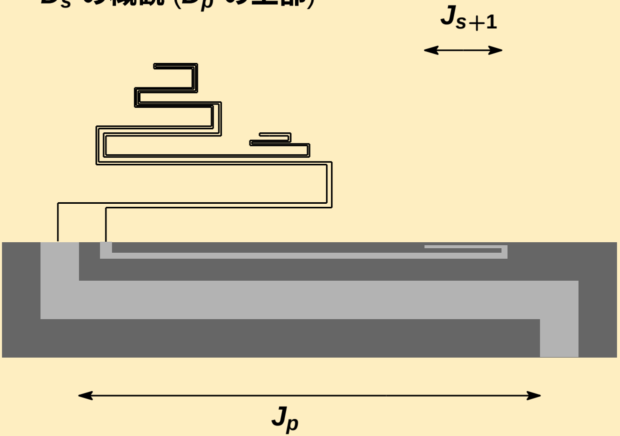
まず，$J_{s+1} \subset J_p$ なる最大の $p \leq s$ を探す．

$J_{s+1} \not\subset J_s$ の場合.



ふっくら部分をペアノ算術の形に削り取りながら，D_p まで帰る.

D_s の概観 (D_p の上部)



D_p のふっくら部分をペアノ算術の形に削り取りながら，
max J_{s+1} まで行き，min J_{s+1} まで折り返す．

主定理 3 (再掲)

$[0,1]^2$ のある非空単連結 Π^0_1 集合で，計算可能な点を含まないものが存在する．

- $D = \bigcap_s D_s$ は Π^0_1 集合である．

主定理 3 (再掲)

$[0,1]^2$ のある非空単連結 Π^0_1 集合で，計算可能な点を含まないものが存在する．

- $D = \bigcap_s D_s$ は Π^0_1 集合である．
- ペアノ算術の完全化は構成に沿って引き伸ばされ，それがある y について $(\Omega, y) \in \mathbb{R}^2$ で束ねられたものが D である．

主定理 3 (再掲)

$[0,1]^2$ のある非空単連結 Π^0_1 集合で，計算可能な点を含まないものが存在する．

- $D = \bigcap_s D_s$ は Π^0_1 集合である．
- ペアノ算術の完全化は構成に沿って引き伸ばされ，それがある y について $(\Omega, y) \in \mathbb{R}^2$ で束ねられたものが D である．
- D の弧状連結性は，Ω の近似 $\{J_s\}$ の性質より．

主定理 3 (再掲)

$[0,1]^2$ のある非空単連結 Π^0_1 集合で，計算可能な点を含まないものが存在する．

- $D = \bigcap_s D_s$ は Π^0_1 集合である．
- ペアノ算術の完全化は構成に沿って引き伸ばされ，それがある y について $(\Omega, y) \in \mathbb{R}^2$ で束ねられたものが D である．
- D の弧状連結性は，Ω の近似 $\{J_s\}$ の性質より．
- D はカントールの扇と同相であり，したがって単連結である．

主定理 3 (再掲)

$[0,1]^2$ のある非空単連結 Π^0_1 集合で，計算可能な点を含まないものが存在する．

- $D = \bigcap_s D_s$ は Π^0_1 集合である．
- ペアノ算術の完全化は構成に沿って引き伸ばされ，それがある y について $(\Omega, y) \in \mathbb{R}^2$ で束ねられたものが D である．
- D の弧状連結性は，Ω の近似 $\{J_s\}$ の性質より．
- D はカントールの扇と同相であり，したがって単連結である．
- 極限 (Ω, y) を除いた部分は，ペアノ算術の完全化の引き伸ばしであるため，計算可能な点を含まない．

主定理 3 (再掲)

$[0,1]^2$ のある非空単連結 Π^0_1 集合で，計算可能な点を含まないものが存在する．

- $D = \bigcap_s D_s$ は Π^0_1 集合である．
- ペアノ算術の完全化は構成に沿って引き伸ばされ，それがある y について $(\Omega, y) \in \mathbb{R}^2$ で束ねられたものが D である．
- D の弧状連結性は，Ω の近似 $\{J_s\}$ の性質より．
- D はカントールの扇と同相であり，したがって単連結である．
- 極限 (Ω, y) を除いた部分は，ペアノ算術の完全化の引き伸ばしであるため，計算可能な点を含まない．
- また，(Ω, y) も計算不可能な点である．

主定理 3 (再掲)

$[0,1]^2$ のある非空単連結 Π^0_1 集合で，計算可能な点を含まないものが存在する．

- $D = \bigcap_s D_s$ は Π^0_1 集合である．
- ペアノ算術の完全化は構成に沿って引き伸ばされ，それがある y について $(\Omega, y) \in \mathbb{R}^2$ で束ねられたものが D である．
- D の弧状連結性は，Ω の近似 $\{J_s\}$ の性質より．
- D はカントールの扇と同相であり，したがって単連結である．
- 極限 (Ω, y) を除いた部分は，ペアノ算術の完全化の引き伸ばしであるため，計算可能な点を含まない．
- また，(Ω, y) も計算不可能な点である．
- よって，D は計算可能な点を含まない．

主定理

主定理（再掲）

1. $[0,1]^2$ のある Π^0_1 デンドライトで，計算可能デンドライトを殆ど含まないものが存在する．
2. $[0,1]^2$ のある計算可能デンドロイドで，Π^0_1 デンドライトを殆ど含まないものが存在する．
3. $[0,1]^2$ のある非空単連結 Π^0_1 集合で，計算可能な点を含まないものが存在する．⇒ *Le Roux-Ziegler* **問題の解決．**

予想 1

$\mathbb{R}^2$ の任意の局所連結 Π^0_1 集合は計算可能な点からなる稠密部分集合を持つ．

予想 1

$\mathbb{R}^2$ の任意の局所連結 Π^0_1 集合は計算可能な点からなる稠密部分集合を持つ．

予想 2

$D \subseteq \mathbb{R}^2$: 局所連結閉集合
$B_\varepsilon(p)$: D と交わる開球
このとき，ある $\delta < \varepsilon$ が存在して，$D \cap B_\delta(p) \neq \emptyset$ かつ $D \cap \partial B_\delta(p)$ はカントール集合と同相ではない．

予想 1

$\mathbb{R}^2$ の任意の局所連結 Π^0_1 集合は計算可能な点からなる稠密部分集合を持つ．

予想 2

$D \subseteq \mathbb{R}^2$: 局所連結閉集合
$B_\varepsilon(p)$: D と交わる開球
このとき，ある $\delta < \varepsilon$ が存在して，$D \cap B_\delta(p) \neq \emptyset$ かつ $D \cap \partial B_\delta(p)$ はカントール集合と同相ではない．

予想 2 $\Longrightarrow$ 予想 1.

Thank you!