Kripke models とScott-Montague semanticsについて

名古屋大学　情報科学研究科
計算機数理科学専攻 朝比奈佑樹

発表の予定

はじめに

様相論理

Kripke models

Scott-Montague semantics

２つの semantics の関係

現在やっていること

はじめに

非古典論理の中に様相論理という論理がある。
Kripke models は、様相論理の論理式の semantics である。さらにその Kripke models を弱くしたものが Scott-Montague semantics である。

様相論理

様相論理とは、命題論理にオペレーターといわれる□ 、◇をつけ加えた論理。□は、「必然的に」、◇は、「可能性」と普通は解釈される。
□ 、◇が論理式に入ったため、古典論理では、真偽が決められない。そのため、Kripke models が考えられた。

様相論理

様相論理の言語
変数 $p_0, p_1, \ldots$
定数　T(真である)
論理結合子　∨ (論理和), ¬（否定）,　□
補助記号 (,)

様相論理

論理式
変数、定数は原子論理式
もし、φ が論理式なら、(¬φ) も論理式
もし、φ が論理式なら、(□φ) も論理式
もし、φ とψ が論理式なら、(φ∨ψ) も論理式

様相論理

φ、ψを論理式とする。

$(\varphi \wedge \psi) \equiv (\neg((\neg\varphi) \vee (\neg\psi)))$

$(\varphi \rightarrow \psi) \equiv ((\neg\varphi) \vee \psi)$

$(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$

$\bot \equiv (\neg T)$

$(\Diamond \varphi) \equiv (\neg(\Box(\neg\varphi)))$

Kripke models

Kripke frame $\mathbb{F}$ = < W ,R >

W は空でない集合

R⊆W ^{2}はWの2つの要素の関係

Wの要素を世界や点と呼ぶ。

xRy $\Leftrightarrow$ (x,y)$\in$R 「y は、x から到達可能」と読む。

R[x]={ y | xRy }

Kripke models

付値　V　は 様相論理の変数から $P(W)$ への関数

このＶを使って $(M,w) \models \varphi$ を帰納的に定義する。

$$(M,w) \models \varphi$$

は、「モデル M の世界 w で φ が真である」という意味。
しばしば $(M,w) \models \varphi$ を $w \models \varphi$ とも書く。

Kripke models

$(M,w) \models \top$

$(M,w) \models p \quad \Leftrightarrow w \in V(p)$, p は、変数

$(M,w) \models \neg\psi \Leftrightarrow (M,w) \not\models \psi$

$(M,w) \models \psi \vee \chi \quad \Leftrightarrow (M \models) \quad \psi$ または $(M, \models w) \quad \chi$

$(M,w) \models \Box\psi \Leftrightarrow (M,w') \models \psi$, すべての $w' \in R[w]$

Kripke models

フレームの性質

(1) F は serial $\Leftrightarrow$ $R[w] \neq \emptyset$, $\forall w \in W$.

(2) F は reflexive $\Leftrightarrow$ $w \in R[w]$, $\forall w \in W$.

(3) F は transitive $\Leftrightarrow$ $R[w]=R[w] \cup R^2[w] \cup \ldots$, $\forall w \in W$.

(4) F は symmetrical $\Leftrightarrow$ $w \in \{w' \in W \mid w'Rw'', w'' \in R[w]\}$, $\forall w \in W$.

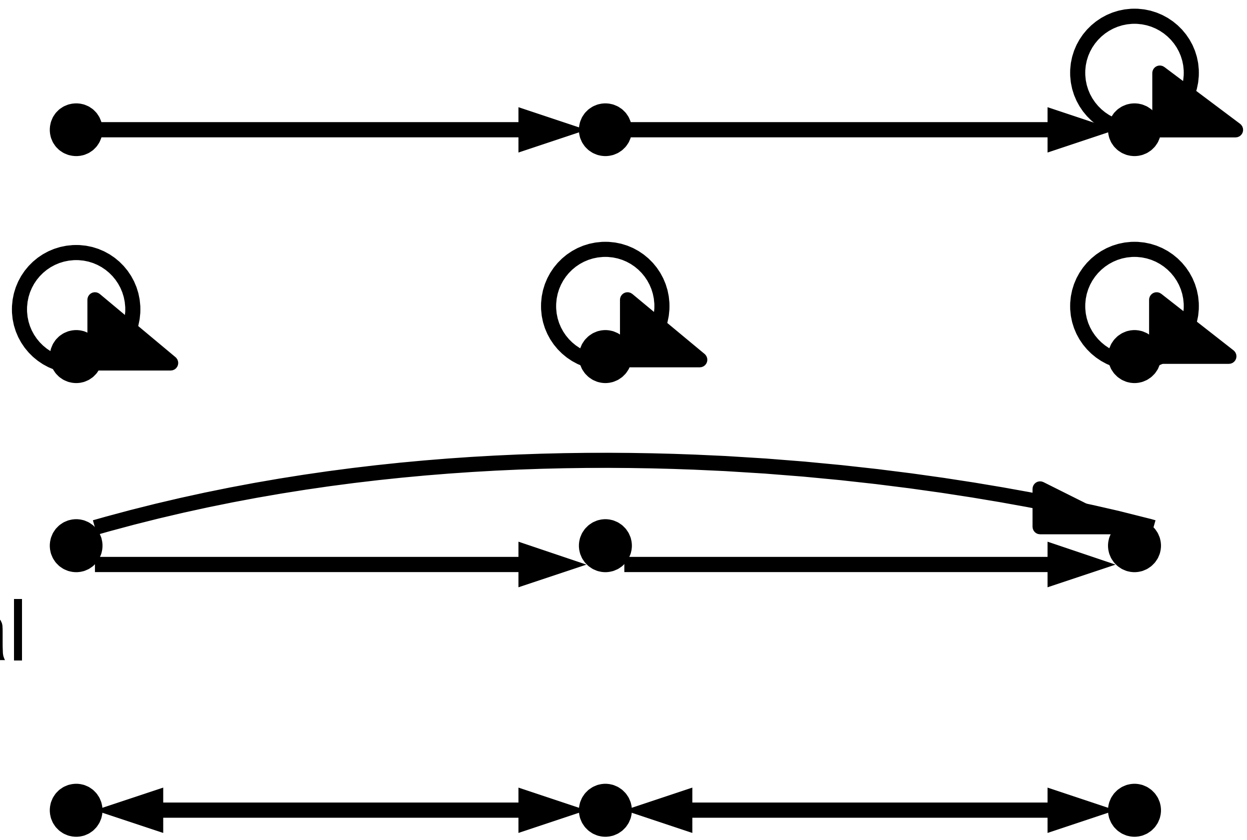
Kripke models

Serial

Reflexive

Transitive

Symmetrical



Kripke models

論理式とフレームの関係

	論理式	フレーム
K	$\Box(p\to q)\to(\Box p\to\Box q)$	all
D	$\Box p\to\Diamond q$	serial
T	$\Box p\to p$	reflexive
4	$\Box p\to\Box\Box p$	transitive
B	$p\to\Box\Diamond p$	symmetrical

Scott-Montague semantics

Kripke models は、様相論理の semantics であった。Scott-Montague semantics は Kripke models を弱くした様相論理の semantics である。

Scott-Montague semantics

Scott-Montague frame $\mathcal{F}$ = ＜ W ,F ＞
W は空でない集合
Fは P(W) から P(W) への関数

付値　V は 様相論理の変数から P(W) への関数

Scott-Montague semantics

$(M,w) \models \top$
$(M,w) \models p \quad \Leftrightarrow w \in V(p)$, p は、変数
$(M,w) \models \neg\psi \Leftrightarrow (M,w) \not\models \psi$
$(M,w) \models \psi \vee \chi \quad \Leftrightarrow (M,w) \models \psi$ または $(M,w) \models \chi$
$(M,w) \models \Box\psi \Leftrightarrow w \in F(\|\psi\|^M), \|\psi\|^M = \{w \in W \mid (M,w) \models \psi\}$

Scott-Montague semantics

$(M,w) \models \top$
$(M,w) \models p \quad \Leftrightarrow w \in V(p)$, p は、変数
$(M,w) \models \neg \psi \Leftrightarrow (M,w) \not\models \psi$
$(M,w) \models \psi \vee \chi \quad \Leftrightarrow (M,w) \models \psi$ または $(M,w) \models \chi$
$(M,w) \models \Box \psi \Leftrightarrow w \in F(||\psi||^M), ||\psi||^M = \{w \in W | (M,w) \models \psi\}$

Scott-Montague semantics

$(M,w) \models \ulcorner$

$(M,w) \models p \Leftrightarrow w \in V(p)$, p は、変数

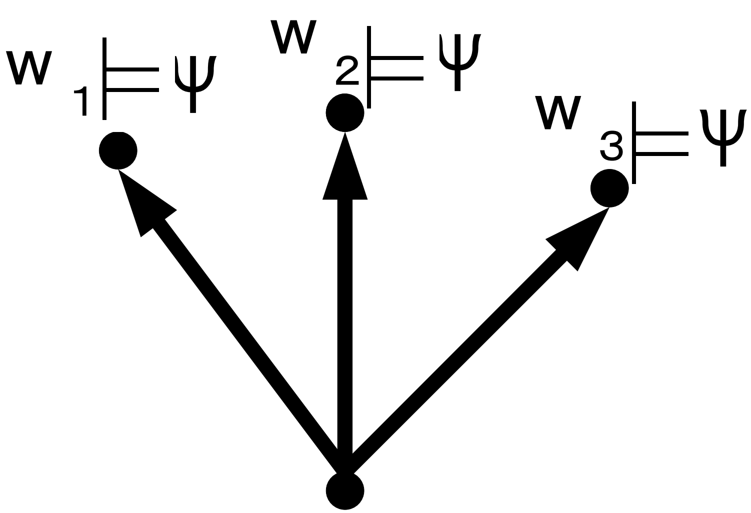
$(M,w) \models \neg\psi \Leftrightarrow (M,w) \not\models \psi$

$(M,w) \models \psi \vee \chi \Leftrightarrow (M,w) \models \psi$ または $(M,w) \models \chi$

$(M,w) \models \Box\psi \Leftrightarrow w \in F(||\psi||^M), ||\psi||^M = \{w \in W | (M,w) \models \psi\}$

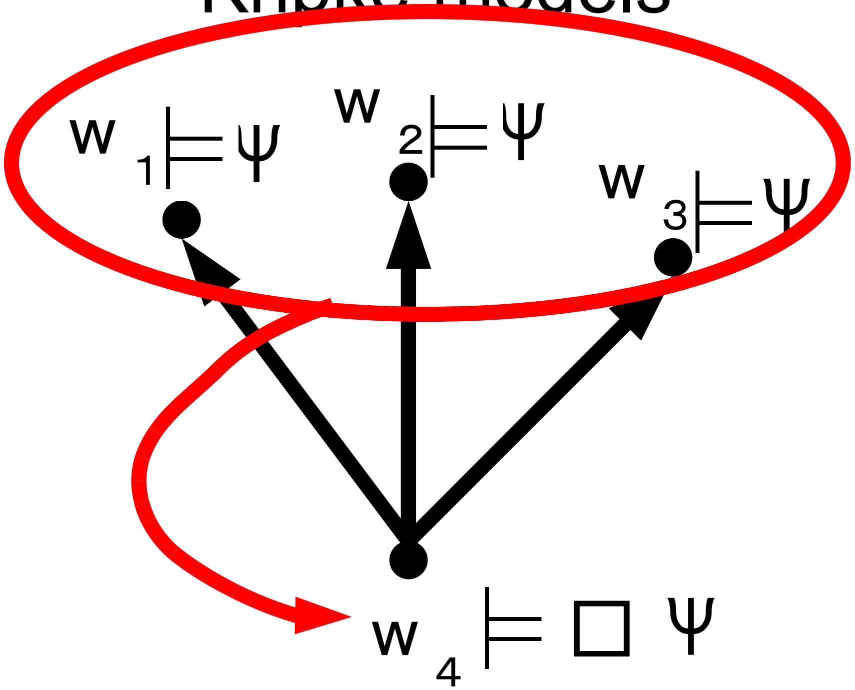
Scott-Montague semantics

Kripke models



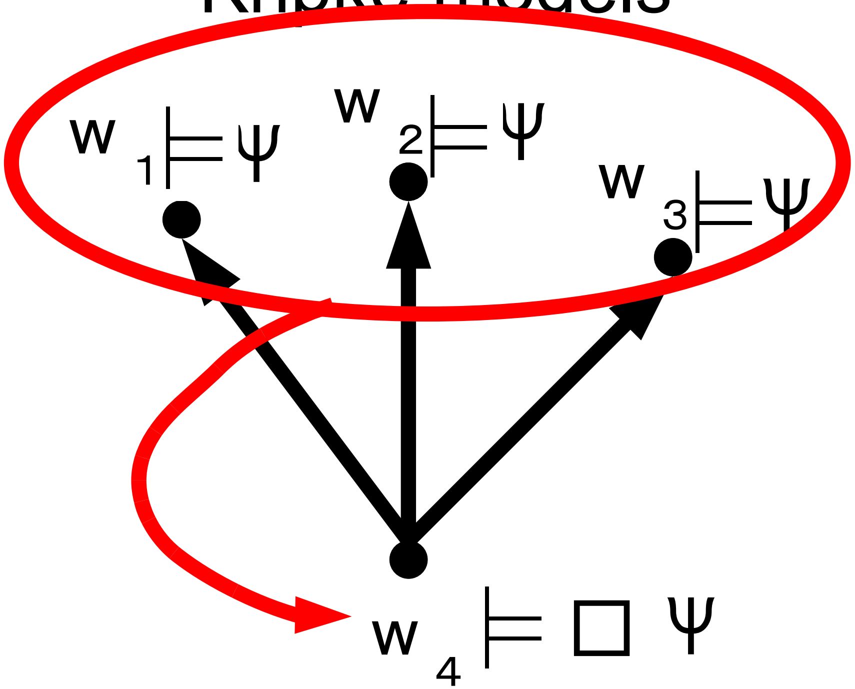
Scott-Montague semantics

Kripke models

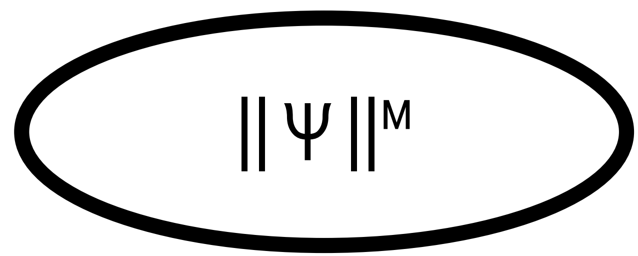


Scott-Montague semantics

Kripke models



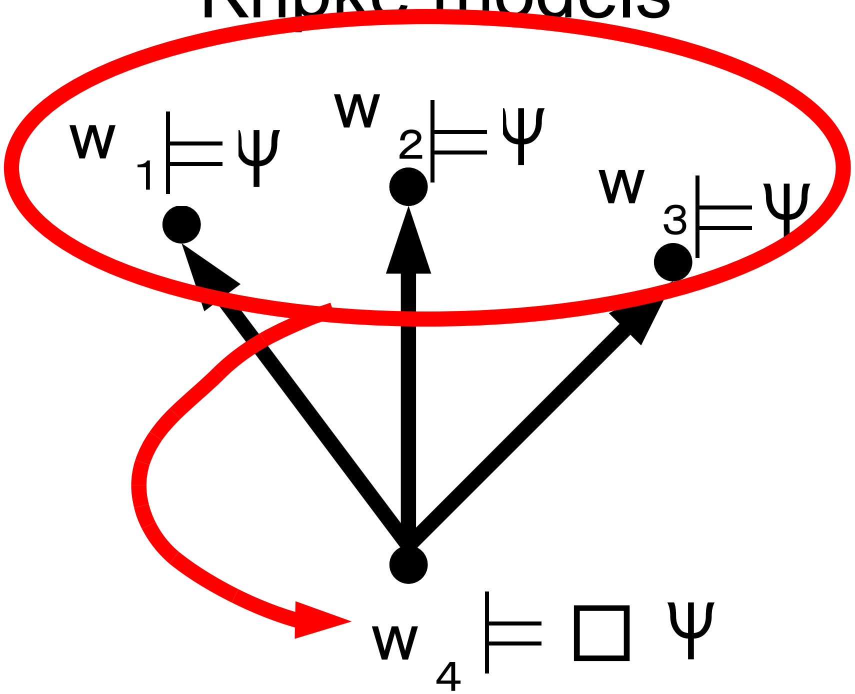
Scott-Montague semantics



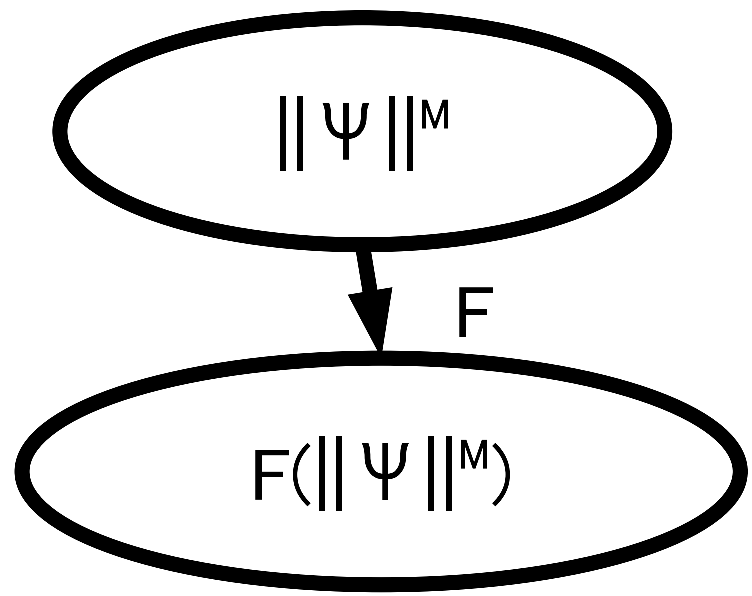
$$\|\Psi\|^M = \{w \in W \mid w \models \Psi\}$$

Scott-Montague semantics

Kripke models



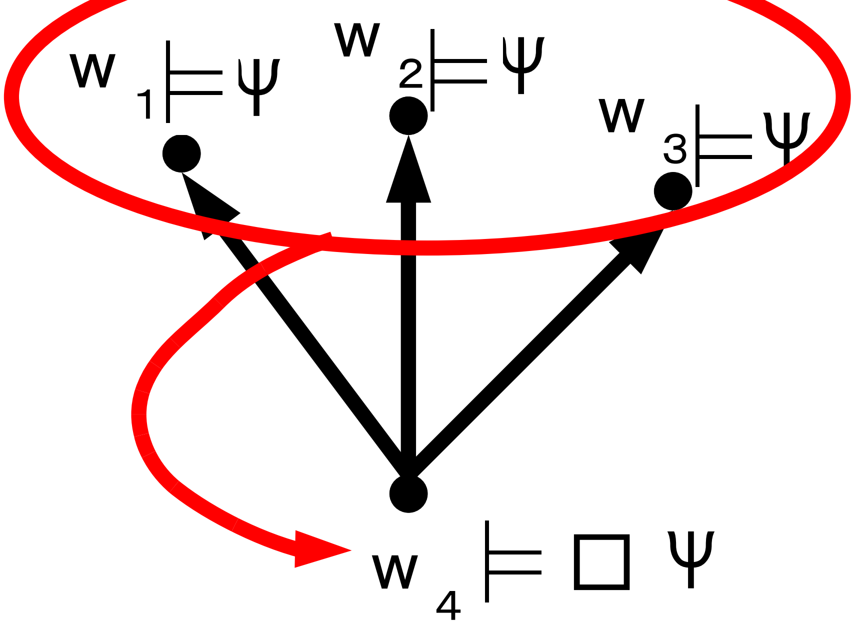
Scott-Montague semantics



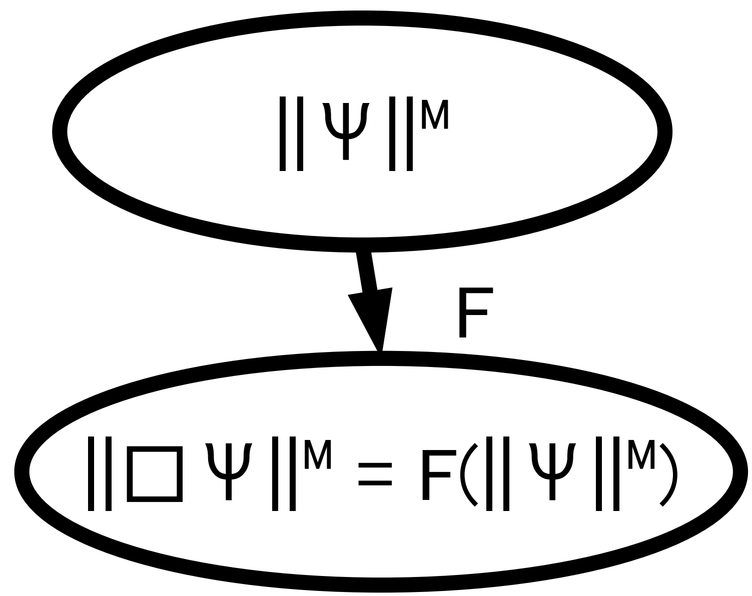
$$\|\Psi\|^M = \{w \in W \mid w \models \Psi\}$$

Scott-Montague semantics

Kripke models



Scott-Montague semantics



$$||\Psi||^M = \{w \in W \mid w \models \Psi\}$$

Scott-Montague semantics

Kripke models との違い

Scott-Montague semantics では論理式Kが成り立たないことがある。

Scott-Montague semantics

(1) F は supplemented

$\Leftrightarrow$ $F(X \cap Y) \subseteq F(X) \cap F(Y)$

(2) F は closed under intersections

$\Leftrightarrow$ $F(X \cap Y) \supseteq F(X) \cap F(Y)$

(3) F は contains the unit

$\Leftrightarrow$ $F(W)=W$

(4) F は filter $\Leftrightarrow$ supplemented

+ closed under intersections

+ contains the unit

Scott-Montague semantics

	論理式	フレーム
M	$\Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q)$	supplemented
C	$(\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)$	closed under intersections
N	$\Box T$	contains the unit
K	$\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$	filter

２つの semantics の関係

Kripke model M_k=<W,R,V>
Scott-Montague model M_s=<W,F,V>

M_k と M_s が pointwise equivalent とは
$(M_k,w)\models \varphi \Leftrightarrow (M_s,w)\models \varphi$ すべての $w \in W$, すべての φ

２つの semantics の関係

定理１　どの Kripke model も pointwise equivalent な Scott-Montague Model がある。

証明
RからFを作ればよい。
$w \in F(X) \Leftrightarrow \{w' \in W | wRw'\} \subseteq X$, すべての w, $X \subseteq W$

今後の予定

Kripke model , Scott-Montague semantics の１階述語の具体的な例を作る。

$\{0,1,2,\cdots,2^n-1\}$ 上の構造

nは時間の経過で増えるとする。

□ は近い将来必ず成立すると解釈する。

現在やっていること

∃x を近い将来見つかると解釈する。

↓

∃xA : 近い将来 A(x) を見つけられる。

これに対応する Kripke model を作る。

現在やっていること

　コンピュータのメモリは時間が経過するにつれて増えていく。メモリが増えるということは、使える数が増えていくということである。しかし、実際は、すべての数を使っているわけではない。

現在やっていること

$w_1, w_2, \ldots$ を世界、M^{w_i} を w_i で使える数、Γ^{w_i} を w_i で必ず使う数とする。

$M^{w_i}_n = \{0,1,2, \ldots 2^n-1\}$

$\Gamma^{w_i} = \{0,1,2, \ldots n, 2^k, 2^n-1, \ldots\}$

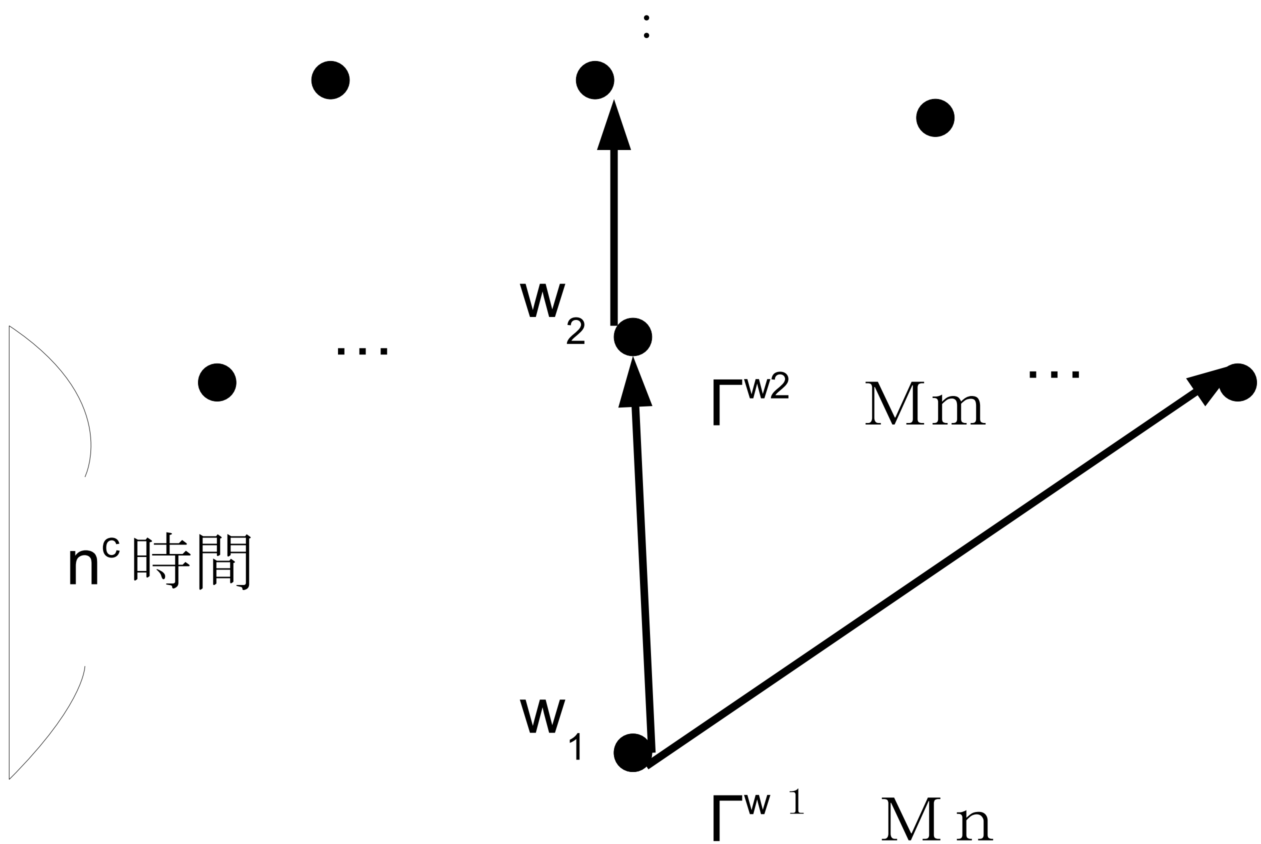
$w_i \leqq w_j$ ならば、$\Gamma^{w_i} \subset \Gamma^{w_j}$

現在やっていること

$R = \{ (w_i, w_j) \mid \forall f \in F(x \in \Gamma^{w_i} \rightarrow f(x) \in \Gamma^{w_j} \}$

w_i で n ビット使えるならば、F は n ビットで書けるもので、n^c 時間以内に解けるもの。

現在やっていること



Scott-Montague semantics

$w \models p$ ⇔ w $\in V$（p）, p は、変数

$w \models \psi \wedge \chi$ ⇔ $w \models \psi$ かつ $w \models \chi$

$w \models \psi \vee \chi$ ⇔ $w \models \psi$ または $w \models \chi$

$w \models \psi \to \chi$ ⇔ wRw_i となるすべての w_i に対し

$w_i \not\models \psi$ または $w \models \chi$

$w \models \neg \psi$ ⇔ wRw_i となるすべての w_i に対し

$w \not\models \psi$

現在やっていること

$w \models \forall x\psi \Leftrightarrow U(w)$ のすべての要素 u に対し ,
$w \models \psi[u/x]$
$w \models \exists x\psi \Leftrightarrow wRw_i$ となるすべての w_i および
$U(w_i)$ のある要素 u に対し、
$w_i \models \psi[u/x]$

現在やっていること

$w \models \forall x\psi \Leftrightarrow U(w)$ のすべての要素 u に対し,
$w \models \psi[u/x]$
$w \models \exists x\psi \Leftrightarrow wRw_i$ となるすべての w_i および
$U(w_i)$ のある要素 u に対し、
$w_i \models \psi[u/x]$

直観主義論理の $\forall x\psi, \exists x\psi$ の真偽の双対

現在やっていること

$(\exists x \forall y (y \leqq x))$「は今考えているモデルで真になるか

現在やっていること

$$w \models (\exists x \forall y (y \leqq x)) \quad \Leftarrow \models w \quad \exists x \in \Gamma^{w} \forall y \in \Gamma^{w} (y \leqq x)$$

現在やっていること

$w \models (\exists x \forall y(y \leqq x))$ $\Leftrightarrow$ wRw_i となるすべての w_i および Γ^{w_i} のある要素 u に対し

$w \models \forall y \in \Gamma^{w}(y \leqq u)$

現在やっていること

$w \models (\exists x \forall y (y \leqq x))$ $\Leftrightarrow$ wRw_i となるすべての w_i および

Γ^{wi} のある要素 u に対し、
Γ^{wi} のすべての要素 v に対し,
$w \models v \leqq u$

現在やっていること

$w \models (\exists x \forall y(y \leqq x))$ ⇔ wRw_i となるすべての w_i および

Γ^{w_i} のある要素 u に対し、
Γ^{w_i} のすべての要素 v に対し，
$w \models v \leqq u$

φはこのモデルで真になる。直観主義論理だと真にならない。

現在やっていること

最終的にφ ⇔ φ「となるとうれしい