半分だけ正規な様相論理

$\Diamond(p \vee q) \rightarrow \Diamond p \vee \Diamond q$ の成り立たない世界

小島 健介

京都大学 情報学研究科

数学基礎論若手の会 2010
11/19–11/21

やりたいこと

動機: 直観主義 + 様相の謎

- (一部の) 直観主義様相論理は，Kripke 意味論的のアイデアに基づいているのに，Kripke 意味論ではとらえにくい面をもつ
  - 「分配律」$\Diamond(p \vee q) \to \Diamond p \vee \Diamond q$ が成り立たない
- こういう様相論理の意味を，もっとよく理解したい！

話の趣旨

- 実は，古典でもそのような様相論理は考えられる
- Neighborhood frame を使ってみた

Outline

1. 準備
   - 様相論理と Kripke 意味論
   - 直観主義について
2. 正規 □ と非正規 ◇
   - 直観主義様相論理と分配律
   - 二種類の観察者
3. 意味論と完全性の話
   - 古典の場合の意味論
   - 直観主義にしてみる
   - 完全性

Outline

1. 準備
   - 様相論理と Kripke 意味論
   - 直観主義について
2. 正規 □ と非正規 ◇
   - 直観主義様相論理と分配律
   - 二種類の観察者
3. 意味論と完全性の話
   - 古典の場合の意味論
   - 直観主義にしてみる
   - 完全性

様相論理とは

システムの論理としての様相論理

- 場所，時間，etc. の状況 (可能世界) に依存して真偽の変化する命題を扱う論理
- 状態遷移系 (グラフ構造) の性質を記述できる
  - 反射性，推移性，対称性，合流性，etc.
  - 計算機システムの検証などへの応用

様相演算子

よく使われる二つの様相

- $\Diamond A$: 到達可能なある点で A が成り立つ
- $\Box A$: 到達可能なすべての点で A が成り立つ

様相論理の言語

使う記号

- 命題変数 ($p, q, \cdots \in \mathbf{PV}$)
- 普通の論理演算子: $\wedge, \vee, \to, \bot$
- 様相演算子: $\Diamond, \Box$

論理式の定義

論理式 ($A, B, \cdots \in \mathcal{L}$) は普通に作る:

$$\mathcal{L} ::= \mathbf{PV} \mid \Diamond\mathcal{L} \mid \Box\mathcal{L} \mid \mathcal{L} \wedge \mathcal{L} \mid \mathcal{L} \vee \mathcal{L} \mid \mathcal{L} \to \mathcal{L} \mid \bot$$

Kripke 意味論 (1/2)

Definition (Kripke frame と付値)

1. 空でない集合 W と，二項関係 $R \subseteq W \times W$ の組 $\langle W, R \rangle$ を Kripke frame という．
2. $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ が Kripke frame のとき，写像 $V : \mathbf{PV} \to \mathcal{P}W$ を $\mathcal{F}$ 上の付値という．

- V が $\mathcal{F}$ 上の付値のとき，直感的には

$$x \in V(p) \iff p \text{ が } x \text{ で真}$$

- V を任意の様相論理式 $\mathcal{L}$ に拡張したい

Kripke 意味論 (2/2)

Definition (論理式の真偽)

$\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ 上の付値 V が与えられたとき,

$$V(\Diamond A) = \{x \mid \exists y.(x \mathrel{R} y, y \in V(A))\}$$

$$V(\Box A) = \{x \mid \forall y.(x \mathrel{R} y \implies y \in V(A))\}$$

$$V(A \wedge B) = V(A) \cap V(B) \qquad V(A \vee B) = V(A) \cup V(B)$$

$$V(A \to B) = V(A)^c \cup V(B) \qquad V(\bot) = \emptyset$$

- $x \in V(A)$ のとき $\mathcal{F}, V, x \Vdash A$ とも書く
- $V(A)$ は A を真にする世界 x の集合

Kripke 意味論と正規様相

Definition (正規性)

1. $\Box$ が正規 $\iff$ $\Box\top$ と $\Box(p \to q) \to \Box p \to \Box q$ が成立
2. $\Diamond$ が正規 $\iff$ $\neg\Diamond\bot$ と $\Diamond(p \vee q) \to \Diamond p \vee \Diamond q$ が成立

(正確には，様相の外延性も仮定する)

Theorem

Kripke 意味論により定まる論理の様相は正規.

Proof.

$\Diamond$ の分配律 $\Diamond(p \vee q) \to \Diamond p \vee \Diamond q$ を示してみる.

...

Kripke 意味論と正規様相

Proof.

$\Diamond$ の分配律 $\Diamond(p \vee q) \to \Diamond p \vee \Diamond q$ を示してみる.

$$
\begin{aligned}
x \Vdash \Diamond(p \vee q) &\iff \exists y. x\, R\, y, y \Vdash p \vee q \\
&\iff \exists y. x\, R\, y, (y \Vdash p \text{ または } y \Vdash q) \\
&\iff (\exists y. x\, R\, y, y \Vdash p) \text{ または } (\exists y. x\, R\, y, y \Vdash q) \\
&\iff (x \Vdash \Diamond p) \text{ または } (x \Vdash \Diamond q) \\
&\iff x \Vdash \Diamond p \vee \Diamond q
\end{aligned}
$$

□

Outline

1. 準備
   - 様相論理と Kripke 意味論
   - 直観主義について
2. 正規 □ と非正規 ◇
   - 直観主義様相論理と分配律
   - 二種類の観察者
3. 意味論と完全性の話
   - 古典の場合の意味論
   - 直観主義にしてみる
   - 完全性

「真」ってどういうこと?

古典的な「真」

古典的には，ある命題が真かどうかは人間の活動とは独立に決まっているように扱われる

- 排中律 $\varphi \vee \neg\varphi$ は当然，成り立つ

直観主義 (構成) 的な「真」

そうではなくて，真理性は証拠の構成可能性と思おう

- 真理は人間が推論して作っていくもの
- 例えば $\varphi \vee \neg\varphi$ が真であると主張するには，φ か $\neg\varphi$ が実際に証明されている必要がある

直観主義論理の Kripke 意味論

Definition (Kripke frame と付値)

1. 空でない集合 W と，その上の (擬) 順序 $\leq$ の組 $\langle W, \leq \rangle$ を直観主義的 Kripke frame という．
2. $\mathcal{F} = \langle W, \leq \rangle$ が直観主義的 Kripke frame のとき，写像 $V : \mathbf{PV} \to \mathcal{P}W$ で遺伝性

$$x \in V(p), x \leq y \implies y \in V(p)$$

をみたすものを $\mathcal{F}$ 上の付値という．

- W は「知識の状態」，$\leq$ は「知識の増加」を表す
- 様相論理のときと同様，V を論理式全体に拡張する

直観主義論理の Kripke 意味論

Definition (論理式の真偽)

$\mathcal{F} = \langle W, \leq \rangle$ 上の付値 V が与えられたとき,

$$\begin{aligned} V(A \to B) &= \{x \mid \forall y \geq x. (y \in V(A) \implies y \in V(B))\} \\ V(A \wedge B) &= V(A) \cap V(B) \\ V(A \vee B) &= V(A) \cup V(B) \\ V(\bot) &= \emptyset \end{aligned}$$

によって V を論理式の全体に拡張する.

- $V(A)$ は A を真にする世界 x の集合
- $x \in V(A)$ のとき $\mathcal{F}, V, x \Vdash A$ とも書く

Outline

1. 準備
   - 様相論理と Kripke 意味論
   - 直観主義について
2. 正規 □ と非正規 ◇
   - 直観主義様相論理と分配律
   - 二種類の観察者
3. 意味論と完全性の話
   - 古典の場合の意味論
   - 直観主義にしてみる
   - 完全性

ここからの話

考えたい問題

- □ が正規で ◇ が非正規な直観主義様相論理がある
  - 普通の Kripke 意味論では理解しがたい挙動
- 一方，そのような様相論理を考える動機は存在するし，そういう「変な」挙動の直感的説明もある
- この状況は，どのように理解すればよいだろうか?

主張

1. 実は，様相の意味が Kripke 意味論と違う
   - 「直観主義だからそうなる」ではない
2. 直観主義でなくても ◇ だけ非正規な論理は考えられる

直観主義様相論理 (IML)

直観主義様相論理とは?

- 直観主義論理に様相が入ったものの総称
- 主に計算機に近い分野で使われている模様

応用例

- プログラミング言語の型システムを考える指針
  - メタプログラミング，分散計算，etc.
    [F. Pfenning '02, Modal Logic Revisited]
- 不完全な実行パスに沿ったモデル検査 [Maier '04]
- 並列プログラムの検証 [Wijesekera, Nerode '05]
- security policy の記述言語 [Abadi '07][Boella et al. '09]

直観主義様相論理 (IML)

直観主義様相論理とは?

- 直観主義論理に様相が入ったものの総称
- 主に計算機に近い分野で使われている模様

応用例

- プログラミング言語の型システムを考える指針
  - メタプログラミング，分散計算，etc.
    [F. Pfenning '02, Modal Logic Revisited]
- 不完全な実行パスに沿ったモデル検査 [Maier '04]
- 並列プログラムの検証 [Wijesekera, Nerode '05]
- security policy の記述言語 [Abadi '07][Boella et al. '09]

「分配律」は成り立つべきか?

◇ の ∨ に関する分配律

- $\Diamond(p \vee q) \to \Diamond p \vee \Diamond q$ を分配律と呼ぶことにする
- 普通の古典様相論理では恒真 (◇ の正規性の一部)
- しかし，これを認めない動機もそれなりにある

認める理由，認めない理由

- $(\exists x.\varphi \vee \psi) \to \exists x.\varphi \vee \exists x.\psi$ は (直観主義でも) 成立するのだから，成り立つのが自然
- ある時 $A \vee B$ が成立するとしても，実際にどちらが成立するかはまだわからないかも

どちらも変なことは言っていないように見える

「分配律」は成り立つべきか?

◇ の ∨ に関する分配律

- $\Diamond(p \vee q) \to \Diamond p \vee \Diamond q$ を分配律と呼ぶことにする
- 普通の古典様相論理では恒真 (◇ の正規性の一部)
- しかし，これを認めない動機もそれなりにある

認める理由，認めない理由

- $(\exists x.\varphi \vee \psi) \to \exists x.\varphi \vee \exists x.\psi$ は (直観主義でも) 成立するのだから，成り立つのが自然
- ある時 $A \vee B$ が成立するとしても，実際にどちらが成立するかはまだわからないかも

どちらも変なことは言っていないように見える

とりあえず言葉の定義

Definition (半正規)

ある様相論理 L が半正規であるとは,

1. □ が正規:

$$\Box\top,\ \ \Box(p \to q) \to \Box p \to \Box q \in L$$

2. ◇ が分配律を満たさない:

$$\Diamond(p \vee q) \to \Diamond p \vee \Diamond q \notin L$$

の二つが成り立つこととする.

Outline

1. 準備
   - 様相論理と Kripke 意味論
   - 直観主義について
2. 正規 □ と非正規 ◇
   - 直観主義様相論理と分配律
   - 二種類の観察者
3. 意味論と完全性の話
   - 古典の場合の意味論
   - 直観主義にしてみる
   - 完全性

どう違う?

一言でいうと

- 観察者が外にいる $\Longrightarrow$ 正規
- 観察者が中にいる $\Longrightarrow$ 半正規

「観察者」とは

- 系 (Kripke frame) の状態を観察する仮想的な主体
- 論理式の真偽はこの主体の視点で語られる

外から見る vs. 中から見る

外にいる観察者

- 系の外に観察者を置く
- すべての世界の情報が同時に参照できる
- Kripke semantics はこの視点が前提
- 他の世界を「見に行って戻ってくる」ことができる

中にいる観察者

- 各世界の中に観察者を置く
- 他の世界の情報が自由に参照できない
- Kripke semantics の枠からはみ出る
- 他の世界を「見に行って戻ってくる」ことはできない

分配律はどうやって証明された?

$\Diamond(p \vee q) \rightarrow \Diamond p \vee \Diamond q$ の証明

1. $x \Vdash \Diamond(p \vee q)$ とする
2. ある y で $y \Vdash p \vee q$
3. $y \Vdash p$ なら $x \Vdash \Diamond p$, $y \Vdash q$ なら $x \Vdash \Diamond q$
4. どちらにしても $x \Vdash \Diamond p \vee \Diamond q$

分配律はどうやって証明された?

$\Diamond(p \vee q) \to \Diamond p \vee \Diamond q$ の証明

1. $x \Vdash \Diamond(p \vee q)$ とする
2. ある y で $y \Vdash p \vee q$
3. $y \Vdash p$ なら $x \Vdash \Diamond p$, $y \Vdash q$ なら $x \Vdash \Diamond q$
   ここで y でどちらが成り立つかチェックして,
   それから x での話に戻っている
4. どちらにしても $x \Vdash \Diamond p \vee \Diamond q$

内部の観察者は分配律を導けない

観察者が世界の中にいると，こうなるはず

$x \Vdash \Diamond(p \vee q)$ だとすると，

- x にいる観察者は，$\exists y \Vdash p \vee q$ であることは知っている
- しかし，p, q のどちらが成立するかは，y に行ってみないとわからない
- このとき x にとっては「$y \Vdash p$ または $y \Vdash q$ だが，実際にどちらになるかは自分にはわからない」
- したがって $x \nVdash \Diamond p \vee \Diamond q$ となる

次にやりたいこと

Conjecture

- 正規・半正規の差は様相の意味の違いによる
  - 正規かどうか: 観察者の位置 (外部/内部)
  - 構成的かどうか: 観察者の従う論理
- それなら構成的であることと正規性は独立であり, 古典でも半正規な様相論理が考えられるのでは? (内部の観察者が古典論理に従う様相論理)

Approach

Neighborhood frame を使ってみる

Outline

1. 準備
   - 様相論理と Kripke 意味論
   - 直観主義について
2. 正規 □ と非正規 ◇
   - 直観主義様相論理と分配律
   - 二種類の観察者
3. 意味論と完全性の話
   - 古典の場合の意味論
   - 直観主義にしてみる
   - 完全性

Neighborhood frame

Definition (Neighborhood frame)

集合 W と写像 $N : W \to \mathcal{P}\mathcal{P}W$ の組 $\langle W, N \rangle$ を neighborhood frame という.

直感的な意味

N は各世界における他の世界の情報の不確かさを表す.

- $|N(x)| > 1$ のときは, R に不確かさがある
- $N(x)$ が大きいほど他の世界について不確定要素が多い
- $\forall x \in W. |N(x)| = 1$ のときが Kripke frame
- ($N(x) = \emptyset$ のときは...?)

古典の Neighborhood Semantics

論理式の解釈

付値は写像 $V : \mathbf{PV} \to \mathcal{P}W$ とする.
$\wedge, \vee, \to, \bot$ は普通に, □ と ◇ は

$$V(\Diamond A) = \{x \mid \forall X \in N(x).X \cap V(A) \neq \emptyset\}$$
$$V(\Box A) = \{x \mid \forall X \in N(x).X \subseteq V(A)\}$$

Remark

- この意味論の定める論理は半正規
- □ と ◇ は双対ではない ($\Box p \not\leftrightarrow \neg\Diamond\neg p$)

分配律の反例

Example

W は適当な集合とする.

- $X, Y \subseteq W$ は空でなく, $X \cap Y = \emptyset$ とする
- $N(x) := \{X, Y\}$
- $V(p) = X, V(q) = Y$ となるように V をとる
- このとき $V, x \Vdash \Diamond(p \vee q)$ だが $V, x \nVdash \Diamond p \vee \Diamond q$

Outline

1 準備
- 様相論理と Kripke 意味論
- 直観主義について

2 正規 □ と非正規 ◇
- 直観主義様相論理と分配律
- 二種類の観察者

3 意味論と完全性の話
- 古典の場合の意味論
- 直観主義にしてみる
- 完全性

直観主義の Neighborhood frame

Definition (Intuitionistic neighborhood frame)

直観主義的 neighborhood frame とは，三つ組 $\langle W, \leq, N \rangle$ で

- $\langle W, \leq \rangle$ は擬順序，$N : W \to \mathcal{P}\mathcal{P}W$
- $x \leq y \implies N(x) \supseteq N(y)$

直感的な解釈

- N はやはり不確かさの度合いを表す
- 知識が増えると不確かさが減る (二つ目の条件)

直観主義の Neighborhood semantics

論理式の解釈

付値 $V : \mathbf{PV} \to \mathcal{P}W$ は遺伝的として,

$$V(\Diamond A) = \{x \mid \forall X \in N(x).X \cap V(A) \neq \emptyset\}$$
$$V(\Box A) = \{x \mid \forall X \in N(x).X \subseteq V(A)\}$$
$$V(A \to B) = \{x \mid \forall y \geq x.\,(y \in V(A) \implies V(B))\}$$

Remark

- この意味論はやはり半正規な論理を定める
- $\leq$ がただの $=$ のときが古典 nbd. semantics

Outline

1. 準備
   - 様相論理と Kripke 意味論
   - 直観主義について
2. 正規 □ と非正規 ◇
   - 直観主義様相論理と分配律
   - 二種類の観察者
3. 意味論と完全性の話
   - 古典の場合の意味論
   - 直観主義にしてみる
   - 完全性

基礎となる論理

Definition (直観主義様相論理 IK^-)

次の公理と推論規則からなる論理を IK^- と呼ぶ

- 直観主義トートロジー
- $\Box(A \to B) \to \Box A \to \Box B$
- $\Box(A \to B) \to \Diamond A \to \Diamond B$
- $A \to B, A \implies B$
- $A \implies \Box A$

Definition (古典様相論理 K^-)

$\mathrm{K}^- := \mathrm{IK}^- \oplus \mathbf{EM}$ (IK^- に排中律を足したもの)

完全性定理

Theorem

$\mathbf{nbd} = \Diamond\bot \to \Box\bot$ とする.

1. $\mathsf{IK}^- \oplus \mathbf{nbd}$ は直観主義 *nbd. semantics* に対し完全
2. $\mathsf{K}^- \oplus \mathbf{nbd}$ は古典 *nbd. semantics* に対し完全

nbd 公理がない論理の意味論は?

矛盾した世界 ($x \Vdash \bot$) を許す意味論を考えると,
その直観主義版と古典版に対し IK^-, K^- はそれぞれ完全.

完全性定理

Theorem

$\mathbf{nbd} = \Diamond\bot \to \Box\bot$ とする.

1. $\mathsf{IK}^- \oplus \mathbf{nbd}$ は直観主義 *nbd. semantics* に対し完全
2. $\mathsf{K}^- \oplus \mathbf{nbd}$ は古典 *nbd. semantics* に対し完全

nbd 公理がない論理の意味論は?

矛盾した世界 ($x \Vdash \bot$) を許す意味論を考えると,
その直観主義版と古典版に対し IK^-, K^- はそれぞれ完全.

まとめ

考察したこと

- 一部の直観主義様相論理に現れる非正規性の解釈
  - 観察者の位置が内部か外部か
- ◇ が非正規であることと直観主義であることは独立

技術的結果

- 半正規様相論理は nbd. semantics で表現できる
- 古典と直観主義で，意味論と公理系は自然に対応
  - 意味論: $\leq$ が自明な場合が古典
  - 公理系: 排中律を追加すると古典