

First-order Provability Logic

倉橋 太志

神戸大学 M2

2010 年 11 月 20 日 数学基礎論若手の会

GL: Propositional modal logic

- Kripke completeness theorem for GL (Seegerberg, 1971)
- Arithmetical completeness theorem for GL (Solovay, 1976)

QGL: First-order modal logic (GL を自然に拡張)

- QGL におけるさまざまな反例 (Montagna, 1984)
- **First-order Provability Logic は再帰的公理化可能でない** (Artemov, 1985)(Vardanyan, 1985)

目次

- ① Propositional provability logic
- ② 述語様相体系 QGL と Kripke model
- ③ Montagna の結果
- ④ Interpretations
- ⑤ 更なる結果と問題

- ① **Propositional provability logic**
- ② 述語様相体系 QGL と Kripke model
- ③ Montagna の結果
- ④ Interpretations
- ⑤ 更なる結果と問題

T : Σ_1 -sound な PA の r.e. 拡大理論とする.

Provability predicate

- T の provability predicate $\text{Pr}_T(x)$ は
 $\forall \varphi$: sentence,

$$T \vdash \varphi \iff \text{PA} \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$$

を満たす Σ_1 -論理式 .

- Gödel は $\text{Pr}_T(x)$ を用いて不完全性定理を証明した .
 ($\text{PA} \vdash \sigma \leftrightarrow \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \sigma \urcorner)$.)
- $\forall \varphi, \psi$: sentences ,
 - $\text{PA} \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$
 - $\text{PA} \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \rightarrow (\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$
 - $\text{PA} \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

Gödel の問題 (1933)

様相演算子 \Box を証明可能性として解釈する様相論理の体系はあるか？

様相論理 (Modal logic): “必然性” と “可能性” に関する論理 .

\Box : 「 \sim は必然である」, \Diamond : 「 \sim は可能である」 .

$\Diamond p \leftrightarrow \neg \Box \neg p$, $\Box p \leftrightarrow \neg \Diamond \neg p$.

\Box : 「 \sim は証明可能である」とすれば

\Diamond : 「 \sim は無矛盾である」 .

Gödel の問題への 1 つの答え (Solovay, 1976)

Provability predicate $\text{Pr}_T(x)$ に関して T の証明できる事実は命題様相体系 **GL** の定理と一致する .

*: 様相文から算術の文への翻訳:

$p \mapsto \varphi$ (p : 命題変数, φ : 算術のある文),

$\Box A \mapsto \text{Pr}_T(\ulcorner A^* \urcorner)$.

例: $(\neg p \wedge \Box \neg p)^* \equiv \neg \varphi \wedge \text{Pr}_T(\ulcorner \neg \varphi \urcorner)$.

First arithmetical completeness theorem (Solovay, 1976)

任意の命題様相文 A に対して

$$\text{GL} \vdash A \iff \forall *, T \vdash A^*.$$

Second arithmetical completeness theorem (Solovay, 1976)

任意の命題様相文 A に対して

$$\text{GLS} \vdash A \iff \forall *, \mathbb{N} \models A^*.$$

PA の任意の Σ_1 -sound な r.e. 拡大理論 T で成立する .

任意の命題命題様相文 A に対して以下は同値:

(i) $GL \vdash A$;

(ii) \prec : 推移的・conversely well-founded

である任意の Kripke frame $\mathcal{M} = \langle W, \prec \rangle$ で A は valid;

(iii) $\forall *, T \vdash A^*$.

メインテーマ

以上の議論を一階述語様相論理に拡張できるか?

問題 1: Kripke completeness が成立するか? ((i) と (ii))

問題 2: Solovay の定理が成立するか? ((i) と (iii))

問題 3: (ii) と (iii) の関係は?

- ① Propositional provability logic
- ② 述語様相体系 QGL と Kripke model
- ③ Montagna の結果
- ④ Interpretations
- ⑤ 更なる結果と問題

述語様相論理の言語

- 変数記号: v_0, v_1, \dots ;
- k 変数述語記号: $P_0^k(\vec{x}), P_1^k(\vec{x}), \dots$;
- 論理記号: $\perp, \rightarrow, \forall$;
- 様相演算子: \Box (ただし $\Diamond A := \neg\Box\neg A$).

述語様相体系 QGL

- 推論規則:
 - modus ponens $A, A \rightarrow B / B$
 - generalization $A(x) / \forall x A(x)$
 - necessitation $A / \Box A$
- 公理:
 - 述語様相論理の言語の全ての恒真式
 - $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$
 - $\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$

定義 (Kripke model)

- 空でない集合 W とその上の二項関係 \prec ,
空でない集合の列 $\{D_w\}_{w \in W}$ ($x \prec y \Rightarrow D_x \subseteq D_y$)
の組 $\langle W, \prec, \{D_w\}_{w \in W} \rangle$ を **Kripke frame** という.
- Kripke frame $\langle W, \prec, \{D_w\}_{w \in W} \rangle$ と,
 $w \in W$ と述語記号の閉インスタンス $Q(\vec{a})$ ($\vec{a} \in D_w^k$) の
関係 \Vdash
の組 $\langle W, \prec, \{D_w\}_{w \in W}, \Vdash \rangle$ を **Kripke model** という.
- Kripke model $\mathcal{M} = \langle W, \prec, \{D_w\}_{w \in W}, \Vdash \rangle$ に対して
 - W を \mathcal{M} の **universe**,
 - W の元を **world**,
 - \prec を \mathcal{M} の **accessibility relation**,
 - D_w を w の **domain**,
 - \Vdash を \mathcal{M} の **valuation**
 という.

定義

任意の述語様相論理式 $Q(\vec{x})$,

Kripke model $\mathcal{M} = \langle W, \prec, \{D_w\}_{w \in W}, \Vdash \rangle$,

$w \in W$, $\vec{a} \in D_w^k$ に対して 関係

$$\mathcal{M}, w \Vdash Q(\vec{a})$$

を以下で定義する.

- $\mathcal{M}, w \Vdash P^k(\vec{a}) \iff w \Vdash P^k(\vec{a})$
($P^k(\vec{a})$: 述語記号の閉インスタンス);
- $\mathcal{M}, w \not\Vdash \perp$;
- $\mathcal{M}, w \Vdash A \rightarrow B \iff (\mathcal{M}, w \Vdash A \implies \mathcal{M}, w \Vdash B)$;
- $\mathcal{M}, w \Vdash \forall x Q(x) \iff \forall b \in D_w(\mathcal{M}, w \Vdash Q(b))$;
- $\mathcal{M}, w \Vdash \Box A \iff \forall x \in W (w \prec x \implies \mathcal{M}, x \Vdash A)$.

L を述語様相体系とする .

定義 (validity)

Kripke frame $\mathcal{F} = \langle W, \prec, \{D_w\}_{w \in W} \rangle$ と

Kripke model $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \Vdash \rangle$, 述語様相文 A に対して ,

- A は \mathcal{M} において **valid** $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall w \in W, w \Vdash A$;
- A は \mathcal{F} において **valid** $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \mathcal{F}$ を frame としてもつ任意の model で A は valid .
- L が $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ において **valid** $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} L$ の公理がすべて $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ において valid .

Kripke soundness theorem

$L \vdash A \Rightarrow L$ を valid とする全ての model で A は valid .

定義 (completeness)

- L は **Kripke frame complete** $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$
 $\forall A (L \text{ を valid とする全ての frame で } A \text{ は valid}$
 $\Rightarrow L \vdash A) .$

問題 1

QGL は Kripke frame complete か？

定理

Kripke frame $\mathcal{F} = \langle W, \prec, \{D_w\}_{w \in W} \rangle$ に対して

以下は同値:

- QGL は \mathcal{F} において valid;
- \prec が推移的かつ **conversely well-founded** .

このような frame を **QGL-frame** という .

定義 (arithmetical interpretation)

述語様相論理式から T の言語の論理式への翻訳

T -interpretation $*$ を以下で帰納的に定義する:

- 各 k -変数述語記号 $P_i^k(\vec{x})$ に対して $(P_i^k(\vec{x}))^*$ は算術の言語のある k -変数論理式;
- $\perp^* \equiv 0 = 1$;
- $(A(\vec{x}) \rightarrow B(\vec{y}))^* \equiv (A^*(\vec{x}) \rightarrow B^*(\vec{y}))$;
- $(\forall x A(x, \vec{y}))^* \equiv \forall x A^*(x, \vec{y})$;
- $(\Box A(\vec{x}))^* \equiv \text{Pr}_T(\ulcorner A^*(\vec{x}) \urcorner)$.

$\ulcorner A^*(\vec{x}) \urcorner$ は $\vec{a} \mapsto \ulcorner A^*(\vec{a}) \urcorner$ を満たす原始帰納的関数 .

$(\Box A(\vec{x}))^*$ は $\Box A(\vec{x})$ と等しい自由変数をもつ .

定義

A を述語様相文とする .

- A は **T -valid** $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall *: T\text{-interpretation}, T \vdash A^*$;
- A は **T -true** $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall *: T\text{-interpretation}, \mathbb{N} \models A^*$.

Arithmetical soundness theorem

任意の述語様相文 A に対して ,

QGL $\vdash A \Rightarrow A$ は **T -valid** .

問題 2

任意の述語様相文 A に対して ,

A は **T -valid** \Rightarrow **QGL** $\vdash A$

が成り立つか ?

- ① Propositional provability logic
- ② 述語様相体系 QGL と Kripke model
- ③ **Montagna の結果**
- ④ Interpretations
- ⑤ 更なる結果と問題

定理 (Montagna, 1984)

QGL は Kripke frame complete でない.

問題 1

QGL は Kripke frame complete か? ... ✕

定理 (Montagna, 1984)

$\exists A$: 述語様相文 s.t.

A は PA-valid かつ QGL $\not\vdash A$ かつ ZF-valid でない.

問題 2 (for PA)

任意の述語様相文 A に対して,

A は PA-valid \Rightarrow QGL $\vdash A$

が成り立つか? ... ✕

- PA-valid な sentences をすべて枚挙するには QGL では公理が足りない。
- どれだけ公理を加えればいいのか？
- そもそも枚挙する効果的手続きは存在するのか？

問題 2'

集合 $\{A : A \text{ は } T\text{-valid}\}$ は r.e. か？

問題 2''

集合 $\{A : A \text{ は } T\text{-true}\}$ は r.e. か？

- ① **Propositional provability logic**
- ② 述語様相体系 QGL と Kripke model
- ③ Montagna の結果
- ④ **Interpretations**
- ⑤ 更なる結果と問題

定理 (Artemov,1985)

T を sound な PA の r.e. 拡大理論とする . このとき ,
 $\{\ulcorner A \urcorner : A \text{ は } T\text{-true}\}$ は算術的でない .

定理 (Vardanyan,1985)

T を sound な PA の r.e. 拡大理論とする . このとき ,
 $\{\ulcorner A \urcorner : A \text{ は } T\text{-valid}\}$ は Π_2^0 -complete .

問題 2'

集合 $\{A : A \text{ は } T\text{-valid}\}$ は r.e. か? ... ✖

問題 2''

集合 $\{A : A \text{ は } T\text{-true}\}$ は r.e. か? ... ✖

算術の言語は $E(x, y)$, $A(x, y, z)$, $M(x, y, z)$ のみからなるとする。ただしこれらは, \mathbb{N} において $x = y, x + y = z, x \times y = z$ と解釈される。

定理 (Artemov, 1985)

T を sound な PA の r.e. 拡大理論とする。このとき, $\{\ulcorner A \urcorner : A \text{ は } T\text{-true}\}$ は算術的でない。

証明には次の事実を用いる。

Tennenbaum の定理 (からの帰結)

$\exists \beta$: 算術の文 s.t.

- $\mathbb{N} \models \beta$
- $\forall M \models \beta$ (M の domain は ω , M で E, A, M が再帰的 $\Rightarrow M \equiv \mathbb{N}$) .

T -true sentences は算術的でない

$$\begin{aligned}
 C &::= \forall x \forall y (\Box E(x, y) \vee \Box \neg E(x, y)) \\
 &\wedge \forall x \forall y \forall z (\Box A(x, y, z) \vee \Box \neg A(x, y, z)) \\
 &\wedge \forall x \forall y \forall z (\Box M(x, y, z) \vee \Box \neg M(x, y, z)) .
 \end{aligned}$$

C のアイデア

$\mathbb{N} \models C^*$ とすると,

- $\mathbb{N} \models \forall x \forall y (\text{Pr}_T(\ulcorner E^*(\dot{x}, \dot{y}) \urcorner) \vee \text{Pr}_T(\ulcorner \neg E^*(\dot{x}, \dot{y}) \urcorner))$.
- $\forall m \forall n \in \omega, T \vdash E^*(\bar{m}, \bar{n})$ or $T \vdash \neg E^*(\bar{m}, \bar{n})$.
- T : sound かつ r.e. ならば, E^*, A^*, M^* は ω 上で再帰的 .

補題

$\forall \varphi$: sentence,

$$\mathbb{N} \models \varphi \iff \forall *, \mathbb{N} \models (\beta \wedge C \rightarrow \varphi)^* .$$

$\mathbb{N} \models \varphi \Rightarrow \forall *, \mathbb{N} \models (\beta \wedge C \rightarrow \varphi)^*$:

- * を任意の T -interpretation , $\mathbb{N} \models \varphi \wedge \beta^* \wedge C^*$ とする .
- T : sound かつ r.e. より , E^*, A^*, M^* は ω 上で再帰的 .
- ω を domain としてもつ構造 \mathcal{M} を

$$\mathcal{M} \models E(m, n) \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \mathbb{N} \models E^*(m, n)$$

$$\mathcal{M} \models A(k, m, n) \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \mathbb{N} \models A^*(k, m, n)$$

$$\mathcal{M} \models M(k, m, n) \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \mathbb{N} \models M^*(k, m, n)$$

とする .

- $\forall \psi, \mathcal{M} \models \psi \Leftrightarrow \mathbb{N} \models \psi^*$ なので $\mathcal{M} \models \beta$.
- Tennenbaum の定理より $\mathcal{M} \equiv \mathbb{N}$ なので $\mathcal{M} \models \varphi$.
- $\mathbb{N} \models \varphi^*$.



$\mathbb{N} \models \varphi \leftarrow \forall^*, \mathbb{N} \models (\beta \wedge C \rightarrow \varphi)^*$:

$\mathbb{N} \models \neg\varphi$ とする .

- * を trivial な interpretation (i.e. E^* は E など) とすると , $\mathbb{N} \models \beta^* \wedge \neg\varphi^*$.
- $\mathbb{N} \models \forall x \forall y (\text{Pr}_T(\ulcorner E(x, y) \urcorner) \vee \text{Pr}_T(\ulcorner \neg E(x, y) \urcorner))$.
なので $\mathbb{N} \models C^*$.



補題より定理が従う .

証明.

- $\{\ulcorner A \urcorner : A \text{ は } T\text{-true}\}$ から $\text{TA} = \{\ulcorner \varphi \urcorner : \mathbb{N} \models \varphi\}$ は計算可能 .
- Tarski の定理より TA は算術的でないので ,
 $\{\ulcorner A \urcorner : A \text{ は } T\text{-true}\}$ も算術的でない .



定理 (Vardanyan, 1985)

T を sound な PA の r.e. 拡大理論とする。このとき、
 $\{\ulcorner A \urcorner : A \text{ は } T\text{-valid}\}$ は Π_2^0 -complete。

補題

$X \in \mathcal{P}(\omega)$ とする。

X が Π_2^0 \Leftrightarrow ある再帰的述語 Q に対して

$X = \{n : \forall i \exists j (j > i \wedge Q(n, j))\}$ 。

証明.

- 再帰的述語 R について $X = \{n : \forall k \exists m R(k, m, n)\}$ 。
- 再帰的述語 Q を、 $Q(n, j) \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} j$ は $\forall k < \text{length}(j)$,
 $(j)_k = \min\{m : R(k, m, n)\}$
 を満たす有限列のコード。
- $X = \{n : \forall i \exists j (j > i \wedge Q(n, j))\}$ 。

$G(x)$: 新しい述語記号

$D := \forall z \forall z' (E(z, z') \rightarrow (\Box G(z) \leftrightarrow \Box G(z')))$

$H(x, y)$: “ x は入力 y で停止する T.M.”

を形式化した Σ_1 -論理式 .

証明

X を Π_2^0 とする .

- 補題より , 再帰的述語 Q について

$$X = \{n : \forall i \exists j (j > i \wedge Q(n, j))\} .$$
- $\sigma(x, y)$ は T において $Q(x, y)$ を表現する Σ_1 -論理式 .
- 各 $n \in \omega$ に対し , φ_n を次の文とする:

$$\beta \wedge C \wedge D \rightarrow \exists v \exists w (v < w \wedge \sigma(\bar{n}, w) \wedge \forall z (\Box G(z) \leftrightarrow H(v, z)))$$
- $X = \{n : \forall *, T \vdash \varphi_n^*\}$ を示せばよい .

$\forall *, T \vdash \varphi_n^* \Rightarrow n \in X$:

$\forall *, T \vdash \varphi_n^*$ とする .

- $*_i$ は , E, A, M をそのまま , $(G(z))^* \equiv E(z, \bar{i})$ とする .
- 各 i について $T \vdash \varphi_n^{*i}$.
- T : sound , $\mathbb{N} \models \beta^{*i} \wedge C^{*i} \wedge D^{*i}$,
 $\mathbb{N} \models \text{Pr}_T(\ulcorner E(z, \bar{i}) \urcorner) \leftrightarrow E(z, \bar{i})$ より ,
 $\mathbb{N} \models \exists v \exists w (v < w \wedge \sigma(\bar{n}, w) \wedge \forall z (E(z, \bar{i}) \leftrightarrow H(v, z)))$.
- このような v を v_i とかけば , v_i は入力 i のみで停止する T.M. なので $i \neq j \Rightarrow v_i \neq v_j$.
- $\mathbb{N} \models \exists w (v_i < w \wedge \sigma(\bar{n}, w))$ を満たす v_i が無限個存在するので $n \in X$.



$$\beta \wedge C \wedge D \rightarrow \exists v \exists w (v < w \wedge \sigma(\bar{n}, w) \wedge \forall z (\Box G(z) \leftrightarrow H(v, z)))$$

$\forall *, T \vdash \varphi_n^* \Leftarrow n \in X:$

$n \in X$, $*$ を任意の T -interpretation とする .

- $M \models T$ を domain が ω で $M \models \beta^* \wedge C^* \wedge D^*$ とする .
- Tennenbaum の定理による議論を形式化して
 $\forall \psi, T \vdash \beta^* \wedge C^* \rightarrow (\psi \leftrightarrow \psi^*)$.
- $\exists a \in \omega$ s.t. $M \models \forall z (\text{Pr}_T(\ulcorner G^*(z) \urcorner) \leftrightarrow H^*(\bar{a}, z))$.
- $\mathbb{N} \models \exists w (\bar{a} < w \wedge \sigma(\bar{n}, w))$ よし
 $M \models \exists w (\bar{a} < w \wedge \sigma(\bar{n}, w))$.
- $M \models \exists w (\bar{a} <^* w \wedge \sigma^*(\bar{n}, w))$.
- $M \models \exists v \exists w (v < w \wedge \sigma_n(w) \wedge \forall z (\Box G(z) \leftrightarrow H(v, z)))^*$.



- ① Propositional provability logic
- ② 述語様相体系 QGL と Kripke model
- ③ Montagna の結果
- ④ Interpretations
- ⑤ 更なる結果と問題

定理 (G. Boolos, V. McGee, and V. Vardanyan, 1987)

集合 $\{\ulcorner A \urcorner : A \text{ は } T\text{-true}\}$ は集合 $\mathbf{TA} = \{\ulcorner \varphi \urcorner : \mathbb{N} \models \varphi\}$ において Π_1^0 -complete である。

問題 3

次の 2 つの主張の関係は？

- (ii) A は任意の QGL-frame で **valid**;
- (iii) A は T -**valid** .

定理 (S. Artemov and G. Dzhaparidze, 1990)

A は T -**valid** \Rightarrow

A は **universe** と各 **domain** がすべて有限である任意の QGL-frame で **valid** .

Montagna 予想

任意の述語様相文 A に対して

QGL $\vdash A \Leftrightarrow$

$\forall T$: PA の r.e. 拡大理論, A は T -valid .

問題 3'

任意の述語様相文 A に対して

A : 任意の QGL-frame で valid \Rightarrow

$\forall T$: PA の r.e. 拡大理論, A は T -valid

が成り立つか?

QGL の Kripke frame incompleteness より, これらは両立しない.

参考文献

- **G. Boolos.** *The logic of provability.* Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- **C. Smoryński.** *Self-Reference and Modal Logic.* Springer, New York, 1985.
- **G. Japaridze and D. de Jongh.** *The Logic of Provability.* Handbook of Proof Theory. North holland, 1998.
- **Sergri N. Artemov and Lev D. Beklemishev.** *Provability logic.* Handbook of Philosophical Logic. Springer, 2005.
- **F. Montagna.** *The predicate modal logic of provability.* Notre Dame Journal of Formal Logic, 25, 179–189, 1984.
- **Sergri N. Artemov.** *Nonarithmeticity of the truth predicate logics of provability.* Doklady Akademii nauk SSSR, 284, 270–271, 1985.